

ชื่อ-สกุล..... รหัสนักศึกษา..... หมู่เรียน.....

ข้าพเจ้าจะปฏิบัติตามข้อตกลงอย่างเคร่งครัด
ลงชื่อผู้เข้าสอบ

[illegible]



ตอนที่ 1 : (10 คะแนน) จงกากบาทข้อที่ถูกที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่สุดคัล้องเงื่อนไต่ต่อไปนี้

13	หาร	a	มีเศษเหลือเท่ากับ	1
13	หาร	b	มีเศษเหลือเท่ากับ	12

แล้ว 13 หารจำนวนใดต่อไปนี้ มี เศษเหลือมากที่สุด

ก. $a + b$

ข. ab

ค. $a - b$

ง. $b - a$

จ. $a^2 + b^2$

2. ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม ที่สอดคล้องสมการ

$$b = aq + r \quad \dots (*)$$

เมื่อ $q, r \in \mathbb{Z}$ พิจารณาเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) $a \neq 0$

(3) $0 \leq r < a$

(5) $0 < r \leq a$

(2) $b \neq 0$

(4) $0 \leq r < |a|$

(6) $0 < r \leq |a|$

แล้วเงื่อนไข (1) – (6) ที่ทำให้สมการ (*) เป็นขั้นตอนวิธีการหาร (Division Algorithm)

ก. (1) และ (3)

ข. (2) และ (5)

ค. (1) และ (4)

ง. (2) และ (6)

จ. (1) และ (5)

3. ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม ที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$a \mid b \quad \text{และ} \quad a \mid c$$

ข้อใดต่อไปนี้ ไม่ถูกต้อง

ก. $a \mid bc$

ข. $a \mid (b + c)$

ค. $a \mid (b - c)$

ง. $a^2 \mid bc$

จ. $a^2 \mid (b + c)$



4. ให้ $d = \gcd(9, b)$ โดยที่ $b \in \mathbb{Z}^+$ ถ้ามีจำนวนเต็ม x ซึ่ง

$$d = 9x + 2b$$

ข้อใดต่อไปนี้กล่าว ถูกต้อง

ก. $x < 0$

ข. d เป็นจำนวนเต็ม

ค. $\gcd(x, 2) = d$

ง. $\gcd(b, 2) = d$

จ. d เป็นจำนวนคู่ (Even number)

5. จำนวนใดต่อไปนี้ เป็น จำนวนเฉพาะ (Prime number)

ก. 267

ข. 275

ค. 273

ง. 277

จ. 279



ตอนที่ 2 : (10 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายบน) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

6. _____

จงหาเศษเหลือที่เกิดจากที่หาร 66^{24} ด้วย 7

7. _____

จงหาหลักหน่วยของจำนวนเต็ม 2024^{66}



8. _____

ให้ d, q เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $d > 1$ โดยที่

$$d \mid (3q + 5) \quad \text{และ} \quad d \mid (q - 4)$$

แล้ว d คือจำนวนใด



9. _____

จงหาจำนวนเลขศูนย์ที่ลงท้ายของจำนวนเต็ม $(25)^{67} \times (20)^{24}$

10. _____

จงหาจำนวนตัวหารของ $9! + 10!$



ตอนที่ 3 : (80 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

11. (10 คะแนน) จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \quad \text{สำหรับจำนวนนับ } n \text{ ใด ๆ}$$

12. (10 คะแนน) จงตอบคำถามต่อไปนี้

12.1 (5 คะแนน) จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

ทุก ๆ จำนวนเต็ม x มีจำนวนเต็ม y เพียงตัวเดียว ซึ่ง $x + y = 24$

12.2 (5 คะแนน) จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

$3 \mid n(n+1)(2n+7)$ ทุก ๆ จำนวนเต็ม n

ข้อเสนอแนะ : ใช้ขั้นตอนวิธีการหาร (Division Algorithm)



13. (10 คะแนน) กำหนด $N = abba$ เป็นจำนวนเต็มห้าหลัก

จงหาจำนวนเต็ม N ทั้งหมดที่ $28 \mid N$

ข้อเสนอนี้ : พิจารณา $28 = 4 \cdot 7$



14. (10 คะแนน) จงตอบคำถามต่อไปนี้

14.1 (5 คะแนน) จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$6 \mid 2^n(2^{2n} - 1) \quad \text{ทุก ๆ จำนวนนับ } n$$

14.2 (5 คะแนน) ให้ $a, b, c \in \mathbb{Z}$ จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า } a \mid bc \text{ และ } \gcd(a + b^2, a^2 + b) = 1 \text{ แล้ว } a \mid c$$



15. (10 คะแนน) จงหาจำนวนเต็ม x, y ที่สอดคล้องสมการ

$$1 = 111x - 191y$$



16. (10 คะแนน) กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม

(ก) a และ b เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 10 แต่ไม่เกิน 100

(ข) $\gcd(a, b) \cdot \text{lcm}(a, b) = 2 \cdot 3 \cdot 5^3$

(ค) $\text{lcm}(a, b) - \gcd(a, b) = 3^3 \cdot 5$

จงหาตัวอย่างจำนวนเต็มบวก a, b ที่สอดคล้องเงื่อนไข (ก)-(ค) อย่างน้อย 1 คู่



17. (10 คะแนน) จงตอบคำถามต่อไปนี้

17.1 (5 คะแนน) ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $ab = 3^2 \cdot 2^3$ และ

$$\gcd(2a, 4a + 2b) = 6$$

แล้ว $\text{lcm}(a, b)$ มีค่าเท่าใด

17.2 (5 คะแนน) ถ้าจำนวนตัวหารของ

$$N = (6! + 5! + 4!)^m$$

มีทั้งหมด 160 ตัว จงหาค่าของ m



18. (10 คะแนน) ให้ p, q เป็นจำนวนเฉพาะซึ่ง $p < q$ โดยที่

$$(p + q) \mid (p^2 + 6q^2 + 7^3 + 7pq)$$

จงหา p, q ที่เป็นไปได้ทั้งหมด



มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
เฉลยข้อสอบกลางภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2566

รหัสวิชา MAI1305	ชื่อวิชา ทฤษฎีจำนวน	วันเวลาสอบ เวลา 09:00 - 12:00 วันจันทร์ ที่ 22 มกราคม 2567	คะแนนเต็ม 100 คะแนน 25%
---------------------	------------------------	--	-------------------------------

โดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธัญชศ จำปาหวาย

ตอนที่ 1 : (10 คะแนน) จงกากบาทข้อที่ถูกต้งที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มทีสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

13 หาร a มีเศษเหลือเท่ากับ 1
13 หาร b มีเศษเหลือเท่ากับ 12

แล้ว 13 หารจำนวนใดต่อไปนี้ มี เศษเหลือมากที่สุด

ก. $a + b$

ข. ab Answer

ค. $a - b$

ง. $b - a$

จ. $a^2 + b^2$

ตอบข้อ ข.

ก. 13 หาร $a + b$ เศษเหลือคือ $1 + 12$ หรือ 0

ข. 13 หาร ab เศษเหลือคือ $1 \cdot 12 = 12$

ค. 13 หาร $a - b$ เศษเหลือคือ $1 - 12 = -11$ หรือ 2

ง. 13 หาร $b - a$ เศษเหลือคือ $12 - 1 = 11$

จ. 13 หาร $a^2 + b^2$ เศษเหลือคือ $1^2 + 12^2 = 145$ หรือ 2



2. ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม ที่สอดคล้องสมการ

$$b = aq + r \quad \dots (*)$$

เมื่อ $q, r \in \mathbb{Z}$ พิจารณาเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) $a \neq 0$

(3) $0 \leq r < a$

(5) $0 < r \leq a$

(2) $b \neq 0$

(4) $0 \leq r < |a|$

(6) $0 < r \leq |a|$

แล้วเงื่อนไข (1) – (6) ที่ทำให้สมการ (*) เป็นขั้นตอนวิธีการหาร (Division Algorithm)

ก. (1) และ (3)

ข. (2) และ (5)

ค. (1) และ (4) **Answer**

ง. (2) และ (6)

จ. (1) และ (5)

ตอบข้อ ค. ขั้นตอนวิธีการหาร (Division Algorithm) กล่าวว่า
ทุก ๆ $a, b \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $a \neq 0$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม q, r เพียงคู่เดียว

$$b = aq + r \quad \text{เมื่อ } 0 \leq r < |a|$$



3. ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม ที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$a \mid b \quad \text{และ} \quad a \mid c$$

ข้อใดต่อไปนี้ ไม่ถูกต้อง

ก. $a \mid bc$

ข. $a \mid (b + c)$

ค. $a \mid (b - c)$

ง. $a^2 \mid bc$

จ. $a^2 \mid (b + c)$ **Answer**

ตอบข้อ จ. ถ้า $a \mid b$ และ $a \mid c$ จะได้ว่ามี $x, y \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $b = ax$ และ $c = ay$ แล้ว

ก. $bc = (ax)(ay) = a(axy)$ ดังนั้น $a \mid bc$

ข. $b + c = (ax) + (ay) = a(x + y)$ ดังนั้น $a \mid (b + c)$

ค. $b - c = (ax) - (ay) = a(x - y)$ ดังนั้น $a \mid (b - c)$

ง. $bc = (ax)(ay) = a^2(xy)$ ดังนั้น $a^2 \mid bc$

จ. ตัวอย่างค้าน ถ้า $4 \mid 4$ และ $4 \mid 8$ แต่ $4^2 \nmid 4 \cdot 8$



4. ให้ $d = \gcd(9, b)$ โดยที่ $b \in \mathbb{Z}^+$ ถ้ามีจำนวนเต็ม x ซึ่ง

$$d = 9x + 2b$$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นกล่าว ถูกต้อง

ก. $x < 0$ Answer

ข. d เป็นจำนวนเต็ม Answer

ค. $\gcd(x, 2) = d$

ง. $\gcd(b, 2) = d$

จ. d เป็นจำนวนคู่ (Even number)

ตอบข้อ ก. หรือ ข. (ตอบข้อใดข้อหนึ่งได้ 2 คะแนน) จากนิยาม ห.ร.ม. d เป็นจำนวนเต็มบวก นั่นคือ d เป็นจำนวนเต็มด้วย และ $d \mid 9$ และ $d \mid b$ เนื่องจาก $b > 0$ จะได้ว่า

$$d \leq 9 \quad \text{และ} \quad d \leq b$$

เนื่องจาก $b < 2b$ และ $2b = d - 2x$ ฉะนั้น $d < 2b$ จะได้ว่า

$$d < d - 2x$$

$$0 < -2x$$

$$0 > x$$

สรุปได้ว่า $x < 0$

ข้อ ค-จ ไม่ถูกต้อง โดยเลือก $b = 15$ จะได้ $d = 3$ และ $x = -3$



5. จำนวนใดต่อไปนี้เป็น จำนวนเฉพาะ (Prime number)

ก. 267

ข. 275

ค. 273

ง. 277 Answer

จ. 279

ตอบข้อ ง. จะเห็นว่า 3 หาร 267, 273, 279 ลงตัว และ $5 \mid 275$ ดังนั้น ก, ข, ค และ จ ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ
พิจารณาจำนวนเฉพาะ $p < \sqrt{277} \approx 16$ จะได้ $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13$ โดยที่

$$2 \nmid 277, 3 \nmid 277, 5 \nmid 277, 7 \nmid 277, 11 \nmid 277 \text{ และ } 13 \nmid 277$$

ดังนั้น 277 เป็นจำนวนเฉพาะ



ตอนที่ 2 : (10 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายบน) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

6. ตอบ 1

จงหาเศษเหลือที่เกิดจากที่หาร 66^{24} ด้วย 7

แนวคำตอบ พิจารณา

7 หาร 66	เศษเหลือเท่ากับ 3
7 หาร 66^{24}	เศษเหลือเท่ากับ 3^{24}
7 หาร $3^4 = 81$	เศษเหลือเท่ากับ 2
7 หาร $3^{24} = (3^4)^3$	เศษเหลือเท่ากับ $2^3 = 8$ หรือ เศษเหลือเท่ากับ 1

ดังนั้น 7 หาร 66^{24} มีเศษเหลือเท่ากับ 1 #

7. ตอบ 6

จงหาหลักหน่วยของจำนวนเต็ม 2024^{66}

แนวคำตอบ พิจารณา

10 หาร 2024	เศษเหลือเท่ากับ 4
10 หาร 2024^{66}	เศษเหลือเท่ากับ 4^{66}
10 หาร $4^2 = 16$	เศษเหลือเท่ากับ 6
10 หาร $4^{66} = (4^2)^{33}$	เศษเหลือเท่ากับ 6^{33}
10 หาร $6^3 = 216$	เศษเหลือเท่ากับ 6
10 หาร $6^{33} = (6^3)^{11}$	เศษเหลือเท่ากับ 6^{11}
10 หาร $6^{11} = (6^3)^3 \cdot 6^2$	เศษเหลือเท่ากับ $6^3 \cdot 6^2 = 6^5$
10 หาร $6^5 = 6^3 \cdot 6^2$	เศษเหลือเท่ากับ $6 \cdot 6^2 = 216$ หรือ เศษเหลือเท่ากับ 6

ดังนั้น หลักหน่วยของจำนวนเต็ม 2024^{66} เท่ากับ 6 #



8. ตอบ 17

ให้ d, q เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $d > 1$ โดยที่

$$d \mid (3q + 5) \quad \text{และ} \quad d \mid (q - 4)$$

แล้ว d คือจำนวนใด

แนวคำตอบ สมมติว่า $d \mid (3q + 5)$ และ $d \mid (q - 4)$ จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม x, y ซึ่ง

$$3q + 5 = dx \quad \text{และ} \quad q - 4 = dy$$

จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} (3q + 5) - 3(q - 4) &= dx - 3dy \\ 17 &= d(x - 3y) \end{aligned}$$

ดังนั้น $d \mid 17$ เนื่องจาก $d \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $d > 1$ สรุปได้ว่า $d = 17$

9. ตอบ 48

จงหาจำนวนเลขศูนย์ที่ลงท้ายของจำนวนเต็ม $(25)^{67} \times (20)^{24}$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} (25)^{67} \times (20)^{24} &= (5^2)^{67} \times (2 \times 10)^{24} \\ &= 5^{134} \times 2^{24} \times 10^{24} \\ &= 5^{110} \times (5^{24} \times 2^{24}) \times 10^{24} \\ &= 5^{110} \times (5 \times 2)^{24} \times 10^{24} \\ &= 5^{110} \times 10^{24} \times 10^{24} \\ &= 5^{110} \times 10^{48} \end{aligned}$$

ดังนั้นจำนวนเลขศูนย์ที่ลงท้ายของจำนวนเต็ม $(25)^{67} \times (20)^{24}$ มี 48 ตัว #

10. ตอบ 320

จงหาจำนวนตัวหารของ $9! + 10!$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} 9! + 10! &= 9! + 9! \cdot 10 = 9!(1 + 10) \\ &= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 11 \\ &= 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times (2 \cdot 3) \times 7 \times 2^3 \times 3^2 \times 11 \\ &= 2^7 \times 3^4 \times 5 \times 7 \times 11 \end{aligned}$$

จำนวนตัวหารของ $9! + 10!$ เท่ากับ

$$(7 + 1)(4 + 1)(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 8 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 320 \quad \text{ตัว}$$

ตอนที่ 3 : (80 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

11. (10 คะแนน) จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \quad \text{สำหรับจำนวนนับ } n \text{ ใด ๆ}$$

บทพิสูจน์. ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $P(n)$ แทนข้อความ

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

ขั้นฐาน : เนื่องจาก $\frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2} = 2 - \frac{1+2}{2}$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย : ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{k+2}{2^k}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{k}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}} &= 2 - \frac{k+2}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}} \\ &= 2 - \frac{2(k+2)}{2^k \cdot 2} + \frac{k+1}{2^{k+1}} \\ &= 2 + \frac{-2(k+2) + k+1}{2^{k+1}} \\ &= 2 + \frac{-2k-4+k+1}{2^{k+1}} \\ &= 2 + \frac{-k-3}{2^{k+1}} \\ &= 2 - \frac{k+3}{2^{k+1}} \\ &= 2 - \frac{(k+1)+2}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

ทำให้สรุปได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราสรุปได้ว่า

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

สำหรับทุกจำนวนนับ n

□

12. (10 คะแนน) จงตอบคำถามต่อไปนี้

12.1 (5 คะแนน) จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

ทุก ๆ จำนวนเต็ม x มีจำนวนเต็ม y เพียงตัวเดียว ซึ่ง $x + y = 24$

แนวคำตอบ เขียนในรูปสัญลักษณ์คือ

$$\forall x \in \mathbb{Z} \exists! y \in \mathbb{Z}, x + y = 24$$

พิสูจน์ข้อความมีเพียงหนึ่งเดียว

บทพิสูจน์. ให้ x เป็นจำนวนเต็ม

ขั้นที่ 1 มีอย่างน้อยหนึ่งตัว เลือก $y = 5 - x$ จะได้ว่า

$$x + y = x + (5 - x) = 5$$

ขั้นที่ 2 มีเพียงตัวเดียว ให้ $y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า $x + y_1 = 24$ และ $x + y_2 = 24$ ฉะนั้น

$$x + y_1 = 24 = x + y_2$$

โดยสมบัติการตัดออกของการบวก สรุปได้ว่า $y_1 = y_2$ □

12.2 (5 คะแนน) จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

$$3 \mid n(n+1)(2n+7) \quad \text{ทุก ๆ จำนวนเต็ม } n$$

ข้อเสนอแนะ : ใช้ขั้นตอนวิธีการหาร (Division Algorithm)

บทพิสูจน์. ให้ n เป็นจำนวนเต็ม โดยขั้นตอนวิธีการหารมีจำนวนเต็ม q ซึ่ง

$$n = 3q \quad \text{หรือ} \quad n = 3q + 1 \quad \text{หรือ} \quad n = 3q + 2$$

- กรณี $n = 3q$ จะได้ว่า

$$n(n+1)(2n+7) = (3q)(3q+1)(2(3q)+7) = 3[q(3q+1)(6q+7)]$$

ดังนั้น $3 \mid n(n+1)(2n+7)$

- กรณี $n = 3q + 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n(n+1)(2n+7) &= (3q+1)(3q+1+1)(2(3q+1)+7) \\ &= (3q+1)(3q+2)(6q+2+7) \\ &= (3q+1)(3q+2)(6q+9) \\ &= (3q+1)(3q+2)3(6q+3) \\ &= 3[(3q+1)(3q+2)(6q+3)] \end{aligned}$$

ดังนั้น $3 \mid n(n+1)(2n+7)$

- กรณี $n = 3q + 2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n(n+1)(2n+7) &= (3q+2)(3q+2+1)(2(3q+2)+7) \\ &= (3q+2)(3q+3)(6q+4+7) \\ &= (3q+2)3(q+1)(6q+11) \\ &= 3[(3q+2)(q+1)(6q+11)] \end{aligned}$$

ดังนั้น $3 \mid n(n+1)(2n+7)$ □



13. (10 คะแนน) กำหนด $N = abbbba$ เป็นจำนวนเต็มห้าหลัก จงหาจำนวนเต็ม N ทั้งหมดที่ $28 \mid N$

ข้อเสนอสันนิษฐาน : พิจารณา $28 = 4 \cdot 7$

แนวคำตอบ เนื่องจาก $28 = 7 \cdot 4$ และ $\gcd(4, 7) = 1$ พิจารณา

$$7 \mid N \text{ และ } 4 \mid N \text{ จะสรุปได้ว่า } 7 \cdot 4 \mid N$$

กรณี $7 \mid N$ จะได้ว่า

$$7 \text{ หาร } 1a + 3b + 2b - 1b - 3a = 4b - 2a = 2(2b - a) \text{ ลงตัว}$$

เนื่องจาก $7 \nmid 2$ จะได้ว่า $7 \mid (2b - a)$

เนื่องจาก b เป็นเลขโดด $2b$ มีค่ามากที่สุด 18 และมีค่าต่ำสุด 0

เนื่องจาก a เป็นเลขโดดที่ไม่ใช่ศูนย์ a มีค่ามากที่สุด 9 และมีค่าต่ำสุด 1

$$-9 \leq 2b - a \leq 17$$

จะได้ว่า

$$2b - a = 0, \pm 7, 14$$

กรณีที่ $4 \mid N$ พิจารณา $4 \mid ba$ เนื่องจาก $ba = 10b + a$ ฉะนั้น

$$4 \text{ หาร } 10b + a = 4(2b) + 2b + a \text{ ลงตัว นั่นคือ } 4 \mid (2b + a)$$

พิจารณาจำนวนที่เป็นไปได้ดังตารางต่อไปนี้

$2b - a$	b	a	$2b + a$	$N = abbbba$	$28 \mid N$
0	1	2	4	21112	ใช่
0	2	4	8	42224	ใช่
0	3	6	12	63336	ใช่
0	4	8	8	84448	ใช่
7	4	1	9	14441	ไม่ใช่
7	5	3	13	35553	ไม่ใช่
7	6	5	17	56665	ไม่ใช่
7	7	7	21	77777	ไม่ใช่
7	8	9	25	98889	ไม่ใช่
-7	0	7	7	70007	ไม่ใช่
-7	1	9	11	91119	ไม่ใช่
14	8	2	18	28882	ไม่ใช่
14	9	4	22	49994	ไม่ใช่

ดังนั้น N ที่เป็นได้ทั้งหมดมี 4 จำนวนคือ 21112, 42224, 63336 และ 84448 #



14. (10 คะแนน) จงตอบคำถามต่อไปนี้

14.1 (5 คะแนน) จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$6 \mid 2^n(2^{2n} - 1) \quad \text{ทุก } n \text{ จำนวนนับ } n$$

บทพิสูจน์. ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $6 \mid 2^n(2^{2n} - 1)$

ขั้นฐาน : เนื่องจาก $2^1(2^2 - 1) = 6$ ดังนั้น $6 \mid 2^1(2^{2 \cdot 1} - 1)$ ทำให้ได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย : สมมติ $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \in \mathbb{N}$ นั่นคือ $6 \mid 2^k(2^{2k} - 1)$ มีจำนวนเต็ม q ซึ่ง

$$2^{3k} - 2^k = 2^k(2^{2k} - 1) = 6q$$

นั่นคือ $2^{3k} = 6q + 2^k$ โดยสมมติฐานจะได้ว่า

$$\begin{aligned} 2^{k+1}(2^{2(k+1)} - 1) &= 2 \cdot 2^k(2^{2k+2} - 1) \\ &= 2 \cdot 2^k(2^2 \cdot 2^{2k} - 1) \\ &= 2^3 \cdot 2^{2k} - 2 \cdot 2^k \\ &= 8(6q + 2^k) - 2 \cdot 2^k \\ &= 48q + 8 \cdot 2^k - 2 \cdot 2^k \\ &= 48q + 6 \cdot 2^k \\ &= 6(8q + 2^k) \end{aligned}$$

ดังนั้น $6 \mid 2^{k+1}(2^{2(k+1)} - 1)$ สรุปได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า

$$6 \mid 2^n(2^{2n} - 1) \quad \text{ทุก } n \text{ จำนวนนับ } n$$

□

14.2 (5 คะแนน) ให้ $a, b, c \in \mathbb{Z}$ จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า } a \mid bc \text{ และ } \gcd(a + b^2, a^2 + b) = 1 \text{ แล้ว } a \mid c$$

บทพิสูจน์. ให้ $a, b, c \in \mathbb{Z}$ สมมติว่า $a \mid bc$ และ $\gcd(a + b^2, a^2 + b) = 1$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม x, y และ k ซึ่ง

$$bc = ak \quad \text{และ} \quad 1 = (a + b^2)x + (a^2 + b)y$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot c &= c(a + b^2)x + c(a^2 + b)y \\ c &= cax + cb^2x + ca^2y + cby \\ &= cax + (bc)bx + ca^2y + (bc)y \\ &= cax + (ak)bx + ca^2y + (ak)y \\ &= a(cx + kbx + cay + ky) \end{aligned}$$

ดังนั้น $a \mid c$

□



15. (10 คะแนน) จงหาจำนวนเต็ม x, y ที่สอดคล้องสมการ

$$1 = 111x - 191y$$

แนวคำตอบ พิจารณาสมการ

$191 = 191(1) + 111(0)$	1	0	R_1
$111 = 191(0) + 111(1)$	0	1	R_2
$80 = 191(1) + 111(-1)$	1	-1	$R_3 = R_1 - R_2$
$31 = 191(-1) + 111(2)$	-1	2	$R_4 = R_2 - R_3$
$18 = 191(3) + 111(-5)$	3	-5	$R_5 = R_3 - 2R_4$
$13 = 191(-4) + 111(7)$	-4	7	$R_6 = R_4 - R_5$
$5 = 191(7) + 111(-12)$	7	-12	$R_7 = R_5 - R_6$
$3 = 191(-18) + 111(31)$	-18	31	$R_8 = R_6 - 2R_7$
$2 = 191(25) + 111(-43)$	25	-43	$R_9 = R_7 - R_8$
$1 = 191(-43) + 111(74)$	-43	74	$R_{10} = R_8 - R_9$

จะได้ว่า $1 = 111(74) - 191(43)$ ดังนั้น $x = 74$ และ $y = 43$ #



16. (5 คะแนน) กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม

(ก) a และ b เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 10 แต่ไม่เกิน 100

(ข) $\gcd(a, b) \cdot \text{lcm}(a, b) = 2 \cdot 3 \cdot 5^3$

(ค) $\text{lcm}(a, b) - \gcd(a, b) = 5 \cdot 29$

จงหาตัวอย่างจำนวนเต็มบวก a, b ที่สอดคล้องเงื่อนไข (ก)-(ค) อย่างน้อย 1 คู่

แนวคำตอบ ให้ $d = \gcd(a, b)$ และ $m = \text{lcm}(a, b)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} dm &= 2 \cdot 3 \cdot 5^3 = 750 \\ m - d &= 5 \cdot 29 = 145 \quad \therefore m = 145 + d \end{aligned}$$

ฉะนั้น

$$\begin{aligned} d(145 + d) &= 750 \\ d^2 + 145d - 750 &= 0 \\ (d - 5)(d + 150) &= 0 \end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $d = 5$ และ $m = 145 + 5 = 150$ พิจารณา

$$\begin{aligned} \gcd(a, b) &= 5 \\ \text{lcm}(a, b) &= 150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \end{aligned}$$

พิจารณาค่า a, b จากตารางต่อไปนี้

a	$3 \cdot 5 = 15$	$2 \cdot 5 = 10$	$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$
b	$2 \cdot 5^2 = 50$	$3 \cdot 5^2 = 75$	$5^2 = 25$
$\gcd(a, b)$	5	5	5
$\text{lcm}(a, b)$	$2 \cdot 3 \cdot 5^2$	$2 \cdot 3 \cdot 5^2$	$2 \cdot 3 \cdot 5^2$

ตัวอย่าง a, b คือ $(15, 50)$ และ $(30, 25)$



17. (10 คะแนน) จงตอบคำถามต่อไปนี้

17.1 (5 คะแนน) ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $ab = 3^2 \cdot 2^3$ และ

$$\gcd(2a, 4a + 2b) = 6$$

แล้ว $\text{lcm}(a, b)$ มีค่าเท่าใด**แนวคำตอบ** โดยการหา ห.ร.ม. แบบยุคลิด จะได้ว่า

$$6 = \gcd(2a, 4a + 2b) = \gcd(2a, 2(2a) + 2b) = \gcd(2a, 2b) = 2 \cdot \gcd(a, b)$$

ฉะนั้น $\gcd(a, b) = 3$ ดังนั้น

$$\text{lcm}(a, b) = \frac{ab}{\gcd(a, b)} = \frac{3^2 \cdot 2^3}{3} = 3 \cdot 2^3 = 24 \quad \#$$

17.2 (5 คะแนน) ถ้าจำนวนตัวหารของ

$$N = (6! + 5! + 4!)^m$$

มีทั้งหมด 160 ตัว จงหาค่าของ m **แนวคำตอบ** พิจารณา

$$\begin{aligned} 6! + 5! + 4! &= 6 \cdot 5 \cdot 4! + 5 \cdot 4! + 4! \\ &= 4!(30 + 5 + 1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 36 = 2^5 \cdot 3^3 \\ N &= (2^5 \cdot 3^3)^m = 2^{5m} \cdot 3^{3m} \end{aligned}$$

จำนวนตัวหารของ N คือ

$$\begin{aligned} (5m + 1)(3m + 1) &= 160 \\ 15m^2 + 8m + 1 &= 160 \\ 15m^2 + 8m - 159 &= 0 \\ (m - 3)(15m + 53) &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $m = 3 \quad \#$



18. (10 คะแนน) ให้ p, q เป็นจำนวนเฉพาะซึ่ง $p < q$ โดยที่

$$(p + q) \mid (p^2 + 6q^2 + 7^3 + 7pq)$$

จงหา p, q ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} p^2 + 6q^2 + 7^3 + 7pq &= (p^2 + 2pq + q^2) + 5q^2 + 5pq + 7^3 \\ &= (p + q)^2 + 5q(p + q) + 7^3 \end{aligned}$$

ดังนั้น $(p + q) \mid 7^3$ จะได้ว่า $p + q = 1, 7, 7^2, 7^3 = 1, 7, 49, 343$

เนื่องจาก p, q เป็นจำนวนเฉพาะซึ่ง $p < q$ และ $p + q$ เป็นจำนวนคี่ ดังนั้น $p = 2$ และ q เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า

$$q = 5, 47, 341$$

เนื่องจาก $341 = 11 \cdot 31$ ดังนั้น p, q ที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ

p	2	2
q	5	47