คณิตศาสตร์

เฉลย Assignment 11
MAC3310 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ ตัวหารศูนย์ และโดเมนเชิงจำนวนเต็ม **สัปดาห์ที่** 12 **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. จงหา **ตัวหารศูนย์ (zero divisor)** ของริงต่อไปนี้

   1.1 $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4$
   วิธีทำ ตัวหารศูนย์ของ $\mathbb{Z}_4$ คือ $\bar{2}$ ดังนั้นตัวหารศูนย์ของ $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4$ ประกอบด้วย

$$\begin{array}{ccc} (\bar{0},\bar{1}) & (\bar{1},\bar{0}) & (\bar{1},\bar{2}) \\ (\bar{0},\bar{2}) & (\bar{2},\bar{0}) & (\bar{2},\bar{2}) \\ (\bar{0},\bar{3}) & (\bar{3},\bar{0}) & (\bar{3},\bar{2}) \\ & (\bar{4},\bar{0}) & (\bar{4},\bar{2}) \end{array}$$

   1.2 $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$
   วิธีทำ ตัวหารศูนย์ของ $\mathbb{Z}_6$ คือ $\bar{2},\bar{3}$ ดังนั้นตัวหารศูนย์ของ $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$ ประกอบด้วย

$$\begin{array}{ccc} (\bar{0},\bar{1}) & (\bar{1},\bar{0}) & (\bar{1},\bar{2}) \\ (\bar{0},\bar{2}) & (\bar{2},\bar{0}) & (\bar{2},\bar{2}) \\ (\bar{0},\bar{3}) & & (\bar{1},\bar{3}) \\ (\bar{0},\bar{4}) & & (\bar{2},\bar{3}) \\ (\bar{0},\bar{5}) & & \end{array}$$

2. จงหา**จำนวนตัวหารศูนย์**ของริงต่อไปนี้

   2.1 $\mathbb{Z}_{2500}$
   วิธีทำ จำนวนตัวหารศูนย์ของ $\mathbb{Z}_{2500}$ เท่ากับ

$$\begin{aligned} (2500-1)-\phi(2500) &= 2499-\phi(2^2\cdot 5^4) \\ &= 2499-(2^2-2)(5^4-5^3) \\ &= 2499-(2)(500) \\ &= 2499-1000 \\ &= 1499 \quad \# \end{aligned}$$

   2.2 $\mathbb{Z}_{3600}$ **วิธีทำ** จำนวนตัวหารศูนย์ของ $\mathbb{Z}_{360}$ เท่ากับ

$$\begin{aligned} (3600-1)-\phi(3600) &= 2499-\phi(2^4\cdot 3^2\cdot 5^2) \\ &= 3599-(2^4-2^3)(3^2-3)(5^2-5) \\ &= 3599-(8)(6)(20) \\ &= 3599-960 \\ &= 2639 \quad \# \end{aligned}$$

3. ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ ถ้าตัวหารศูนย์ (zero divisor) ของ $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_4$ มีทั้งหมด 35 ตัว จงหา p

วิธีทำ ตัวหารศูนย์ของ $\mathbb{Z}_4$ คือ $\bar{2}$ แต่ $\mathbb{Z}_p$ ไม่มีตัวหารศูนย์ ดังนั้น $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_4$ ประกอบด้วย

$$\begin{array}{ccc}
(\bar{0},\bar{1}) & (\bar{1},\bar{0}) & (\bar{1},\bar{2}) \\
(\bar{0},\bar{2}) & (\bar{2},\bar{0}) & (\bar{2},\bar{2}) \\
(\bar{0},\bar{3}) & (\bar{3},\bar{0}) & (\bar{3},\bar{2}) \\
 & \vdots & \vdots \\
 & (\overline{p-1},\bar{0}) & (\overline{p-1},\bar{2})
\end{array}$$

ดังนั้นจำนวนตัวหารศูนย์ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_4$ เท่ากับ $3+(p-1)+(p-1)$ นั่นคือ

$$\begin{aligned}
3+(p-1)+(p-1) &= 35 \\
2p+1 &= 35 \\
p &= 17 \quad \#
\end{aligned}$$

4. ให้ R เป็นริงซึ่งมี $1 \neq 0$ และ $a,b \in R$ ซึ่ง $ab=1$ จงแสดงว่า

ถ้า a ไม่เป็นตัวหารศูนย์ แล้ว $ba=1$

บทพิสูจน์ . ให้ R เป็นริงซึ่งมี $1 \neq 0$ และ $a,b \in R$ ซึ่ง $ab=1$
สมมติว่า a ไม่เป็นตัวหารศูนย์ จะได้ว่า

$$a(ba-1) = a(ba)-a = (ab)a-a = 1a-a = a-a = 0$$

ถ้า $ba-1 \neq 0$ จะขัดแย้งกับ a ไม่เป็นตัวหารศูนย์ ดังนั้น $ba-1=0$ หรือ $ba=1$ $\square$