



แคลคูลัส ๒

Calculus 2

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์
มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

แคลคูลัส ๒

MAC1303 Calculus 2

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชศ จำปำหวาย
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
แก้ไขล่าสุด : กรกฎาคม 2568

สารบัญ

1	ลำดับและอนุกรม	1
1.1	ลำดับของจำนวนจริง	1
1.2	อนุกรมของจำนวนจริง	14
1.3	การทดสอบแบบปริพันธ์	31
1.4	การทดสอบโดยใช้การเปรียบเทียบ	35
1.5	การลู่เข้าแบบสัมบูรณ์	41
1.6	อนุกรมสลับ	46
2	อนุกรมกำลัง	53
2.1	รัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้า	53
2.2	ฟังก์ชันในรูปอนุกรมกำลัง	59
2.3	ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์	68
2.4	อนุกรมเทย์เลอร์	74
3	ปริภูมิสามมิติ	83
3.1	ระบบพิกัดฉากในปริภูมิสามมิติ	83
3.2	เวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ	88
3.3	เส้นตรงในปริภูมิสามมิติ	105
3.4	ระนาบในปริภูมิสามมิติ	120
3.5	ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์	134
4	ระบบพิกัดเชิงขั้ว	149
4.1	พิกัดเชิงขั้ว	149
4.2	กราฟของสมการในระบบพิกัดเชิงขั้ว	157
4.3	การหาพื้นที่ของอาณาบริเวณในระบบพิกัดเชิงขั้ว	167
5	ฟังก์ชันหลายตัวแปร	175
5.1	ฟังก์ชันค่าจริงสองตัวแปร	175
5.2	ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันสองตัวแปร	179
5.3	อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันสองตัวแปร	189
5.4	กฎลูกโซ่สำหรับฟังก์ชันหลายตัวแปร	195
5.5	อนุพันธ์อันดับสูง	200

5.6	การประมาณค่าเชิงเส้น	205
6	ปริพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปร	209
6.1	ปริพันธ์สองชั้นบนโดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า	209
6.2	ปริพันธ์สองชั้นบนโดเมนทั่วไป	215
6.3	ปริพันธ์สองชั้นบนระบบพิกัดเชิงขั้ว	228
7	สมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น	243
7.1	สมการเชิงอนุพันธ์	243
7.2	สมการแยกตัวแปรได้	248
7.3	สมการเอกพันธ์	251
7.4	สมการแม่นตรง	256
7.5	ตัวประกอบปริพันธ์	260
7.6	สมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง	264

บทที่ 1

ลำดับและอนุกรม

1.1 ลำดับของจำนวนจริง

บทนิยาม 1.1.1 ลำดับ (Sequence) ของจำนวนจริง คือฟังก์ชันที่โดเมนเป็นจำนวนเต็มบวก และค่าเป็นจำนวนจริง

ให้ $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง นิยมเขียน $a(n)$ แทนด้วย a_n ดังนั้น

$$a = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \dots, (n, a_n), \dots\}$$

เนื่องจาก a_n ต้องคู่กับ n เสมอ ในคู่อันดับ (n, a_n) ดังนั้นจะเขียนลำดับ a ด้วยสัญลักษณ์

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\} \text{ หรือ } a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \text{ หรือ } \{a_n\}$$

โดยเรียก a_n ว่าพจน์ที่ n หรือพจน์ทั่วไปของลำดับ $\{a_n\}$

ตัวอย่าง 1.1.2 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับต่อไปนี้

1. $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$ คำตอบ

2. $2, 7, 12, 17, \dots$ คำตอบ

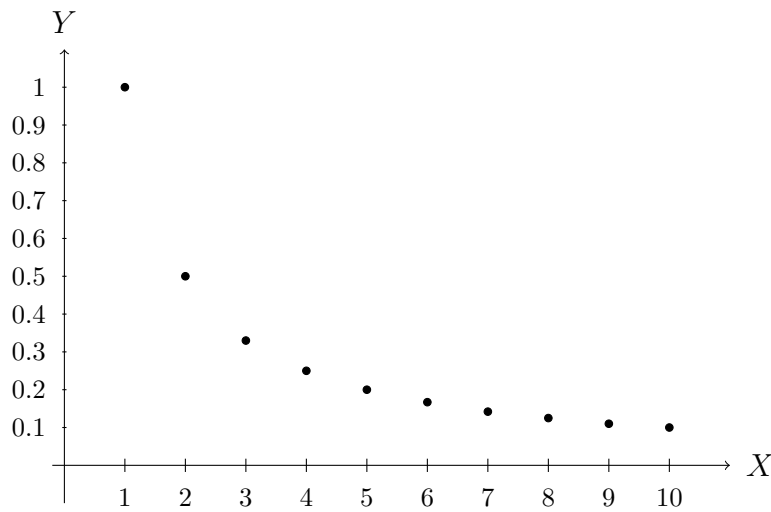
3. $\{-1, 1, -1, 1, \dots\}$ คำตอบ

4. $1, 3, 7, 15, \dots$ คำตอบ

5. $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right\}$ คำตอบ

6. $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \dots\right\}$ คำตอบ

พิจารณากฎของลำดับ $\{\frac{1}{n}\}$

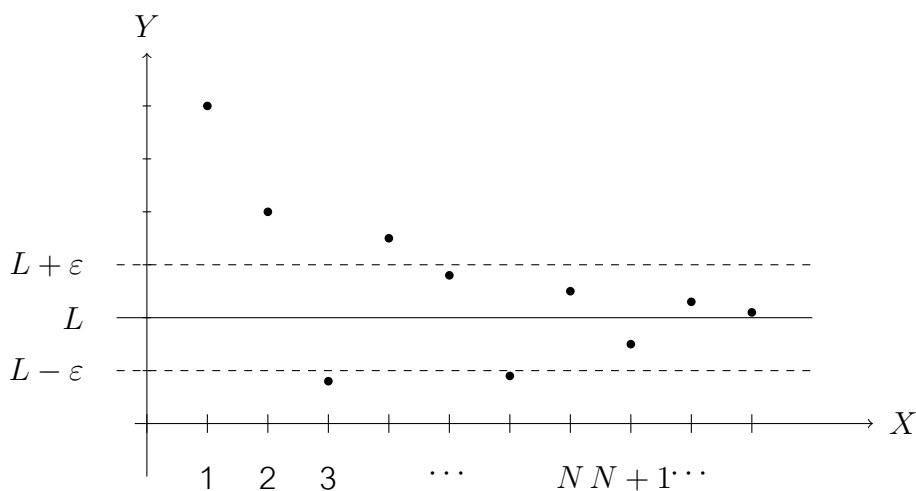


จากกราฟข้างต้นแนวโน้ม $\frac{1}{n}$ จะเข้าใกล้ 0 เมื่อ n มีค่ามาก ๆ นั้นหมายถึง $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ แต่เป็นเพียงการคาดเดาเท่านั้นไม่ใช่การพิสูจน์ ซึ่งการยืนยันค่าดังกล่าวต้องอาศัยบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.1.3 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ $L \in \mathbb{R}$ จะกล่าวว่า L เป็นลิมิตของ $\{a_n\}$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับจำนวนจริงบวก ε ใด ๆ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{ทุก ๆ จำนวนนับ } n \geq N$$

และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ และแสดงความหมายได้ดังกราฟต่อไปนี้



ต่อไปจะเรากล่าวถึง **หลักการอาร์คิมิดีส (Archimedes Principle)** เพื่อใช้ในการพิสูจน์เกี่ยวกับลิมิตของลำดับ ซึ่งกล่าวไว้ว่า

สำหรับจำนวนจริงบวก x ใด ๆ จะได้ว่ามี $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $\frac{1}{n} < x$

ตัวอย่าง 1.1.4 จงพิสูจน์ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

บทพิสูจน์. ให้ $\varepsilon > 0$ โดยหลักการอาร์คิมิดีส จะได้ว่ามี N เป็นจำนวนนับซึ่ง $\frac{1}{N} < \varepsilon$
ให้ $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n \geq N$ จะได้ว่า

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ □

ทฤษฎีบท 1.1.5 ให้ t เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^t} = 0$$

บทพิสูจน์. ให้ $\varepsilon > 0$ และ $t \in \mathbb{Z}^+$ ทำให้ได้ว่า $\sqrt[t]{\varepsilon} > 0$
โดยหลักการอาร์คิมิดีส จะได้ว่ามี N เป็นจำนวนนับซึ่ง $\frac{1}{N} < \sqrt[t]{\varepsilon}$
ให้ $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n \geq N$ จะได้ว่า $n^t \geq N^t$ ฉะนั้น

$$\left| \frac{1}{n^t} - 0 \right| = \frac{1}{n^t} \leq \frac{1}{N^t} < \varepsilon$$

ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^t} = 0$ □

เราอาจขยายทฤษฎีบทนี้ไปยัง t ที่เป็นจำนวนจริงบวก ผลที่ได้ยังคงเหมือนเดิม

ทฤษฎีบท 1.1.6 สำหรับค่าคงตัว k ใด ๆ จงแสดงว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k = k$$

บทพิสูจน์. ให้ $a_n = k$ และ $\varepsilon > 0$ ไม่ว่า N เป็นจำนวนนับใด ๆ จะได้ว่า

$$|a_n - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon \quad \text{ทุก } n \text{ จำนวนนับ } n \geq N$$

ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} k = k$ □

ทฤษฎีบท 1.1.7 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ $L, k \in \mathbb{R}$ โดยที่ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ จะได้ว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ka_n = k \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = kL$$

ทฤษฎีบท 1.1.8 ให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ $L, M \in \mathbb{R}$

โดยที่ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = M$ จะได้ว่า

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} [a_n + b_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L + M$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = LM$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{L}{M} \quad \text{เมื่อ } M \neq 0$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^m = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^m = L^m \quad \text{เมื่อ } m \in \mathbb{N}$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \sqrt[m]{L} \quad \text{เมื่อ } m \in \mathbb{N} \text{ และ } \sqrt[m]{L} \in \mathbb{R}$$

ตัวอย่าง 1.1.9 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 3}{1 - 3n + 2n^2}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2 + 1}}{n + \sqrt[3]{n^3 + 1}}$$

ตัวอย่าง 1.1.10 จงหาค่าลิมิต $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$

ทฤษฎีบท 1.1.11 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง จะได้ว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$$

ตัวอย่าง 1.1.12 จงหาค่าลิมิตของ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n}$

ทฤษฎีบท 1.1.13 ทฤษฎีบทการบีบ (The Squeeze Theorem)

ให้ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ และ $\{c_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ถ้า $n_0 \in \mathbb{N}$ เมื่อ $L \in \mathbb{R}$ ซึ่ง

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{ทุกจำนวนนับ } n \geq n_0$$

และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$

ตัวอย่าง 1.1.14 จงใช้ทฤษฎีบทการบีบแสดงว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} = 0$

ทฤษฎีบท 1.1.15 ให้ r เป็นจำนวนจริงซึ่ง $|r| < 1$ จะได้ว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$$

ตัวอย่าง 1.1.16 จงหาค่าลิมิตของ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 2^{n+1}}{3^{n-1} - 3 \cdot 2^n}$

ลำดับลู่เข้าและลำดับลู่ออก

บทนิยาม 1.1.17 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง จะกล่าวว่า $\{a_n\}$ เป็น **ลำดับลู่เข้า** (convergent) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง L ซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ นอกจากนั้น $\{a_n\}$ เป็น **ลำดับลู่ออก** (divergent)

ตัวอย่าง 1.1.18 จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\left\{ \frac{(n+1)^2}{\sqrt{n^4+1}} \right\}$

2. $\{n - \sqrt{n}\}$

ในบางกรณีเราสามารถหาขีดจำกัด $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ได้จากการหาขีดจำกัด

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

เมื่อ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่กำหนดบนช่วง $[1, \infty)$ และ $f(n) = a_n$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ โดยอาศัยความรู้ในวิชาแคลคูลัส 1 จะได้ทำให้สรุปได้ว่า

$$\text{ถ้า } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L, \infty \text{ หรือ } -\infty \text{ แล้ว } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

ตัวอย่าง 1.1.19 จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้เป็ลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

$$1. \left\{ \frac{2^n}{n} \right\}$$

$$2. \left\{ \frac{\ln n}{n} \right\}$$

ตัวอย่าง 1.1.20 จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้เป็ลำดับลู่เข้าหรือลู่อก

1. $\left\{ n \sin \left(\frac{1}{n} \right) \right\}$

2. $\left\{ n^{\frac{1}{n}} \right\}$

ลำดับย่อย

บทนิยาม 1.1.21 ให้ $\{n_k\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ซึ่ง

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$$

สำหรับลำดับ $\{a_n\}$ ใด ๆ ถ้าให้ $b_k = a_{n_k}$ จะได้ว่า $\{b_k\}$ เป็นลำดับที่มีพจน์ที่ k เป็นพจน์ที่ n_k ของลำดับ $\{a_n\}$ จะเรียกว่าลำดับ $\{b_k\}$ ว่า **ลำดับย่อย (subsequence)** ของ $\{a_n\}$

ตัวอย่าง 1.1.22 จงยกตัวอย่างของลำดับย่อยของ $\{2n - 1\}$ มาอย่างน้อย 2 ลำดับ

ทฤษฎีบท 1.1.23 ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ มีลิมิตเป็นจำนวนจริง L แล้วจะได้ว่า

ทุกลำดับย่อยของ $\{a_n\}$ มีลิมิตเป็น L

จากทฤษฎีบท 1.1.23 เราจะได้ข้อสรุปต่อไปนี้

1. ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ มีลำดับย่อยที่ลู่ออก แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก
2. ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ มีสองลำดับย่อยที่ลิมิตต่างกัน แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

ตัวอย่าง 1.1.24 จงแสดงว่า $\left\{ \frac{(-1)^n n}{n+1} \right\}$ เป็นลำดับลู่ออก

ลำดับมีขอบเขต

บทนิยาม 1.1.25 จะกล่าวว่าลำดับของจำนวนจริง $\{a_n\}$ มี **ขอบเขต (bounded)** ก็ต่อเมื่อ

$$\text{มีจำนวนจริงบวก } M \text{ ซึ่ง } |a_n| \leq M \text{ ทุก } n \in \mathbb{N}$$

ทฤษฎีบท 1.1.26 (ทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบมีขอบเขต (Bounded Convergent Theorem))
ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต

บทนิยาม 1.1.27 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับจำนวนจริง จะกล่าวว่า $\{a_n\}$ เป็น

1. ลำดับไม่เพิ่ม (nonincreasing sequence) ก็ต่อเมื่อ $a_n \geq a_{n+1}$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$

2. ลำดับไม่ลด (nondecreasing sequence) ก็ต่อเมื่อ $a_n \leq a_{n+1}$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$

และ $\{a_n\}$ เป็น ลำดับทางเดียว (monotone sequence) ก็ต่อเมื่อ $\{a_n\}$ เป็นลำดับไม่เพิ่มหรือเป็นลำดับไม่ลด

ตัวอย่าง 1.1.28 จงแสดงว่าลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับทางเดียว

1. $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$

2. $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$

ทฤษฎีบท 1.1.29 (ทฤษฎีบทการลู่เข้าของลำดับทางเดียว (Monotone Convergent Theorem))
ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขตและลำดับทางเดียว แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

ตัวอย่าง 1.1.30 จงแสดงว่า $\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

แบบฝึกหัด 1.1

1. จงหาลิมิตต่อไปนี้

$$1.1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + 1} + n}{\sqrt[3]{n^3 + 3}}$$

$$1.2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^5(1-n)^2}{n^4(2n-1)^3}$$

$$1.3 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

$$1.4 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 1} - n + 1\right)$$

$$1.5 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$$

$$1.6 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - 3n}{\sqrt{n+5}}$$

$$1.7 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n + n^2}{e^n + n}$$

$$1.8 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$1.9 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n) - 2n^2}{n^2 + 1}$$

$$1.10 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(3n^2 + 1)}{\ln(n+1)}$$

$$1.11 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + \sqrt{n^4 + 1}}}{2n + \sqrt[3]{n^3 + 5}}$$

$$1.12 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\cos^2 n}$$

$$1.13 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n\pi}{n^2 + 1}$$

$$1.14 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n \cos n}{n^2 + 1}$$

2. จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้ เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

$$2.1 \quad \left\{ \frac{\sqrt{9^n + n}}{2^n + 3^n} \right\}$$

$$2.4 \quad \left\{ \frac{e^n(2n^4 + n^3 + 1)}{n^4(e^n + 2^n)} \right\}$$

$$2.7 \quad \left\{ \frac{\ln n}{\ln(n+1)} \right\}$$

$$2.2 \quad \left\{ \frac{n}{\ln(e^n + 1)} \right\}$$

$$2.5 \quad \left\{ \frac{n + (-1)^n}{2n + 1} \right\}$$

$$2.8 \quad \left\{ \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!} \right\}$$

$$2.3 \quad \left\{ \frac{3^n + 2}{2^n + 1} \right\}$$

$$2.6 \quad \left\{ \frac{n}{n(-1)^n + 2} \right\}$$

$$2.9 \quad \left\{ \frac{n!2^n}{(2n)!} \right\}$$

3. จงพิจารณาว่าลำดับ $\{a_n\}$ ที่นิยามต่อไปนี้ เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

$$3.1 \quad a_1 = 1, a_{n+1} = 5a_n - 3 \quad \text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$3.2 \quad a_1 = 6, a_{n+1} = \frac{a_n}{n} \quad \text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$3.3 \quad a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n} \quad \text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, \dots$$

4. จงทดสอบว่าลำดับ $a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!}$ เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

1.2 อนุกรมของจำนวนจริง

บทนิยาม 1.2.1 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k \end{aligned}$$

เรียก S_n ว่า ผลบวกย่อย (partial sum) ของ n พจน์แรกของ $\{a_n\}$ และเรียก $\{S_n\}$ ว่า อนุกรมอนันต์ (infinite series) ของจำนวนจริง หรือเรียกสั้น ๆ ว่า อนุกรม (series) ซึ่งจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

ต่อไปจะกล่าวถึงสมบัติเบื้องต้นเกี่ยวกับสัญลักษณ์แทนการบวก โดยให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง เมื่อ $m \in \mathbb{N}$ และ c เป็นค่าคงที่ จะได้ว่า

1. $\sum_{k=1}^n c = cn$
2. $\sum_{k=1}^n ca_k = c \sum_{k=1}^n a_k$
3. $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$

ตัวอย่าง 1.2.2 ถ้า $\sum_{k=1}^5 a_k = 25$ และ $\sum_{k=1}^5 b_k = 15$ จงหาค่า $\sum_{k=1}^5 (a_k + 2b_k - 4)$

อนุกรมเทเลสโคป

ทฤษฎีบท 1.2.3 (อนุกรมเทเลสโคป (Telescoping Series))

ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง จะได้ว่า

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$$

ตัวอย่าง 1.2.4 จงหาผลบวกต่อไปนี้

1. $\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)}$

2. $\sum_{n=1}^{80} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$

3. $\sum_{n=1}^{50} \ln \left(\frac{n}{n+1} \right)$

ทฤษฎีบท 1.2.5 (สูตรของเกาส์ (Gauss' Formula))

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ทฤษฎีบท 1.2.6 จะได้ว่า

$$1. \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$2. \sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

ตัวอย่าง 1.2.7 จงหาผลบวกต่อไปนี้

$$1. \sum_{n=1}^{10} (3k + 1)$$

$$2. \sum_{n=1}^{10} (2k + 1)^2$$

$$3. \sum_{n=1}^{10} (k - 1)^3$$

ตัวอย่าง 1.2.8 จงหาผลบวกต่อไปนี้ $2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + 100^2$

ตัวอย่าง 1.2.9 จงแสดงว่า $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

อนุกรมเรขาคณิต

ทฤษฎีบท 1.2.10 (อนุกรมเรขาคณิต (Geometric Series))

ให้ a และ r เป็นค่าคงตัวที่ไม่ใช่ศูนย์ แล้ว $\sum_{k=1}^n ar^{k-1}$ เรียกว่าอนุกรมเรขาคณิต โดยที่

$$\sum_{k=1}^n ar^{k-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad \text{เมื่อ } r \neq 1$$

ตัวอย่าง 1.2.11 จงหาผลบวกต่อไปนี้

1. $\sum_{k=1}^{10} 2^k$

2. $\sum_{k=1}^{10} 2^{-k}$

3. $2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^9$

ผลบวกของอนุกรม

บทนิยาม 1.2.12 ถ้า $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ เมื่อ $S \in \mathbb{R}$ จะกล่าวว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า (convergent) และเรียก S ว่า **ผลบวกของอนุกรม** ซึ่งเขียนแทนด้วย

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

ตัวอย่าง 1.2.13 จงพิจารณาว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 1.2.14 จงพิจารณาว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 1.2.15 จงพิจารณาว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

ทฤษฎีบท 1.2.16 (การทดสอบอนุกรมเทเลสโคป (Telescoping Series Test))

ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง จะได้ว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และ

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$$

ตัวอย่าง 1.2.17 จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n}{n+1} \right)$$

ตัวอย่าง 1.2.18 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 1.2.19 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

การทดสอบอนุกรมเรขาคณิต

ทฤษฎีบท 1.2.20 (การทดสอบอนุกรมเรขาคณิต (Geometric series Test))

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้า เมื่อ } |r| < 1 \text{ โดยมีผลบวกของอนุกรมเป็น } \frac{a}{1-r}$$

และเป็นอนุกรมลู่ออกเมื่อ $|r| \geq 1$

ตัวอย่าง 1.2.21 จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2} - 1)^{-n}$

ทฤษฎีบท 1.2.22 ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า โดยที่ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ เป็นค่าคงตัว จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้า}$$

$$\text{และ } \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

ตัวอย่าง 1.2.23 จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^{n+1}}{4^n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + 2^n)^2}{5^n}$

ตัวอย่าง 1.2.24 จงพิจารณาว่า $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 1.2.25 จงพิจารณาว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

การทดสอบอนุกรมลู่ออก

ทฤษฎีบท 1.2.26 ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก แล้วจะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

โดยกฎแย้งกลับที่ของทฤษฎีบทนี้เรียกว่า การทดสอบอนุกรมลู่ออก (Divergent Test)

ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ หรือไม่มีลิมิต แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.2.27 จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$ อนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.2.28 จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ อนุกรมลู่ออก

ทฤษฎีบท 1.2.29 ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \text{ เป็นอนุกรมลู่ออก}$$

ตัวอย่าง 1.2.30 จงพิจารณาว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{n}{n+1} \right)$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 1.2.31 จงพิจารณาว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2^n)^2}{3^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

แบบฝึกหัด 1.2

1. ถ้า $\sum_{k=1}^8 a_k = 20$ และ $\sum_{k=1}^8 b_k = 5$ จงหาค่า

1.1 $\sum_{k=1}^8 (3a_k - 2b_k)$

1.2 $\sum_{k=1}^8 2(a_k + 3b_k - 1)$

2. จงหาค่าผลบวกต่อไปนี้

2.1 $\sum_{k=1}^{11} k(3 - 2k)$

2.2 $\sum_{k=1}^{11} (k + 1)^3$

2.3 $\sum_{k=1}^{15} \sqrt{(k - 2)^2}$

2.4 $\sum_{k=1}^{100} k(1 + (-1)^k)$

2.5 $\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{k^2 + 4k + 3}$

2.6 $\sum_{k=1}^{100} \ln \left(\frac{n^2 + n}{n^2 + 3n + 2} \right)$

2.7 $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + 50 \cdot 51 \cdot 52$

2.8 $1 \cdot 99 + 2 \cdot 97 + 3 \cdot 95 + \cdots + 49 \cdot 3$

2.9 $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 99^2$

2.10 $1 + (1 + 3) + (1 + 3 + 5) + \cdots + (1 + 3 + 5 + \cdots + 99)$

3. จงแสดงว่า $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

4. จงแสดงว่า $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n(n + 1)(n + 2) = \frac{n(n + 1)(n + 2)(n + 3)}{4}$

5. จงใช้อนุกรมเทเลสโคปพิสูจน์ว่า

5.1 $\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$

5.2 $\sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n + 1)}{2} \right]^2$

6. จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาผลบวกของอนุกรมนั้น

$$6.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}$$

$$6.12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 3n + 2}$$

$$6.2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^4 + n - 1}}{3n^2 + 1}$$

$$6.13 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

$$6.3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$$

$$6.14 \sum_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{n^2}{n+1} \right)$$

$$6.4 \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$6.15 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}}$$

$$6.5 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3^n} + \left(-\frac{3}{5} \right)^n \right)$$

$$6.16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$6.6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{3^n + 5^n}$$

$$6.17 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$

$$6.7 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n} - 4^n}{10^n}$$

$$6.18 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

$$6.8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{-n} + 1}{2^n}$$

$$6.19 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 - n}$$

$$6.9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

$$6.20 \sum_{n=1}^{\infty} \sin n$$

$$6.10 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

$$6.21 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(-\frac{2}{3} \right)^n + \frac{1}{n(n+1)} \right)$$

$$6.11 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2 + 4n + 3} + 4^{-n} \right)$$

$$6.22 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 + 4 + 6 + \cdots + (2n)}$$

7. จงยกตัวอย่างอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก ที่ทำให้

$$7.1 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \text{ เป็นอนุกรมลู่ออก}$$

$$7.2 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้า}$$

8. ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก จงพิสูจน์ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \text{ เป็นอนุกรมลู่ออก}$$

1.3 การทดสอบแบบปริพันธ์

ทฤษฎีบท 1.3.1 การทดสอบแบบปริพันธ์ (Integral Test)

ให้ $n_0 \in \mathbb{N}$ และ $f : [n_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ มีค่าเป็นบวก เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่ม และเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง บนช่วง $[n_0, \infty)$ จะได้ว่า

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} f(k) \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{n_0}^n f(x) dx \text{ มีค่าเป็นจำนวนจริง}$$

ตัวอย่าง 1.3.2 จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

ตัวอย่าง 1.3.3 จงพิจารณาว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 1.3.4 จงพิจารณาว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{ne^{\sqrt{n}}}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

อนุกรมพีและการทดสอบอนุกรมพี

บทนิยาม 1.3.5 อนุกรมพี (p-Series) คืออนุกรมที่เขียนในรูป $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ เมื่อ $p \in \mathbb{R}$ เป็นค่าคงตัว

ทฤษฎีบท 1.3.6 (การทดสอบอนุกรมพี (p-Series Test))

อนุกรมพีจะเป็นอนุกรมลู่เข้า เมื่อ $p > 1$ และเป็นอนุกรมลู่ออก เมื่อ $p \leq 1$

ตัวอย่าง 1.3.7 จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3}}$

ตัวอย่าง 1.3.8 จงพิจารณาว่า $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{-2} + (-2)^n)$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

แบบฝึกหัด 1.3

1. จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก โดยใช้การทดสอบแบบปริพันธ์

$$1.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + 1}$$

$$1.2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$$

$$1.3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+2)}{n+2}$$

$$1.4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$$

$$1.5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n)}{n^2 + 1}$$

$$1.6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^4 + 4}$$

$$1.7 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{n^2}$$

$$1.8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

$$1.9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{2n^2+1}}$$

$$1.10 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$$

$$1.11 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

$$1.12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-\ln n}}{n(2^{-\ln n} + 1)}$$

$$1.13 \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-n} + \frac{1}{n \sqrt[3]{n}} \right)$$

$$1.14 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}}$$

$$1.15 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

$$1.16 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$$

$$1.17 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$$

$$1.18 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n+1}}$$

2. จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

$$2.1 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^5}}$$

$$2.2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}}$$

$$2.3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-n} + \frac{1}{n \sqrt[3]{n}} \right)$$

$$2.4 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n^4} \right)$$

$$2.5 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{3^{-n}} + \sqrt{\frac{n}{\sqrt{n^5}}} \right)$$

$$2.6 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n^4} \right)$$

$$2.7 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$2.8 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3^n}{2^n} + \frac{1}{n^3} \right)$$

1.4 การทดสอบโดยใช้การเปรียบเทียบ

ทฤษฎีบท 1.4.1 (การทดสอบโดยใช้การเปรียบเทียบ (The Comparison Test))

ให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง สมมติว่ามี $n_0 \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad \text{สำหรับ } n \geq n_0$$

จะได้ว่า

1. ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
 2. ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก
-

ตัวอย่าง 1.4.2 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{n} \right)^2$

ตัวอย่าง 1.4.3 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

ทฤษฎีบท 1.4.4 (การทดสอบโดยใช้การเปรียบเทียบด้วยลิมิต (The Limit Comparison Test))

ให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ถ้า $a_n \geq 0$ และ $b_n \geq 0$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ และ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

เมื่อ L เป็นจำนวนจริง หรือ ∞ จะได้ว่า

1. ถ้า $L > 0$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
2. ถ้า $L = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
3. ถ้า $L = \infty$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.4.5 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n^4 + n + 1}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+n+1}$$

ตัวอย่าง 1.4.6 จงทดสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{4^n - 3^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 1.4.7 จงทดสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 1.4.8 จงทดสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

แบบฝึกหัด 1.4

1. จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

$$1.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^3+3n^2+1}$$

$$1.2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{(3n-1)^4}$$

$$1.3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{n} \right)^4$$

$$1.4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \ln(n+1)}$$

$$1.5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n3^n+5}$$

$$1.6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt{n^3+1}}$$

$$1.7 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ell n n}{n\sqrt{n}}$$

$$1.8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{n}$$

$$1.9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ell n n}{e^n \ln(n+2)}$$

$$1.10 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n3^n-2}$$

$$1.11 \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)^{-2\ell n n}$$

$$1.12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n3^n-1}$$

$$1.13 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{6^n+5^n}$$

$$1.14 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^5}$$

$$1.15 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$$

$$1.16 \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n^2}$$

2. ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต และ $a_n \geq 0$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ จงพิสูจน์ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)^p} \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้า ทุก ๆ } p > 1$$

1.5 การลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

ทฤษฎีบท 1.5.1 ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ตัวอย่าง 1.5.2 จงทดสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

บทนิยาม 1.5.3 ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้วเรียกอนุกรมนี้ว่าเป็นอนุกรม

1. ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ (absolute converge) ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
2. ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข (conditional convergence) ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.5.4 จงทดสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์หรือไม่

ตัวอย่าง 1.5.5 จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^3 + 5}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

การทดสอบโดยใช้อัตราส่วน

ทฤษฎีบท 1.5.6 (การทดสอบโดยใช้อัตราส่วน (The Ratio Test))

ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $a_n \neq 0$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ และ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$$

เมื่อ L เป็นจำนวนจริง หรือ ∞ จะได้ว่า

1. ถ้า $L < 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์
2. ถ้า $L > 1$ และ $L = \infty$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.5.7 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n}$

ตัวอย่าง 1.5.8 จงทดสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{3^{\ell n}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 1.5.9 จงทดสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

การทดสอบโดยใช้การถอดกรณฑ์

ทฤษฎีบท 1.5.10 (การทดสอบโดยใช้การถอดกรณฑ์ (The Root Test))

ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

เมื่อ L เป็นจำนวนจริง หรือ ∞ จะได้ว่า

1. ถ้า $L < 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์
 2. ถ้า $L > 1$ และ $L = \infty$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก
-

บทพิสูจน์. ขอละไว้ในวิชานี้



ตัวอย่าง 1.5.11 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n^2}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^n$

แบบฝึกหัด 1.5

1. จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

$$1.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{e^n}$$

$$1.2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$1.3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$1.4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{4^n + n + 1}$$

$$1.5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^n}$$

$$1.6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n}$$

$$1.7 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$1.8 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{\ln(n+1)}\right)^n$$

$$1.9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2)}{2^n}$$

$$1.10 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$$

$$1.11 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln(n+1)}{3^n}$$

$$1.12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\ln(n+1)}$$

$$1.13 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^3}$$

$$1.14 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)!}$$

$$1.15 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2 + 1}$$

$$1.16 \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$1.17 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^n}$$

$$1.18 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2n}{n+1}\right)^{-5n}$$

$$1.19 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100} 100^n}{n!}$$

$$1.20 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{n+1} + 2^n}{3e^n + 5}\right)^n$$

$$1.21 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{\ln(2^n + 1)}\right)^n$$

2. จงหาจำนวนจริง x ที่ทำให้อนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

$$2.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$$

$$2.2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

1.6 อนุกรมสลับ

บทนิยาม 1.6.1 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ $a_n > 0$ ทุก $n \in \mathbb{N}$ อนุกรมในรูป

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \quad \text{หรือ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

เรียกว่า **อนุกรมสลับ** (alternating series)

ทฤษฎีบท 1.6.2 (การทดสอบอนุกรมสลับ (Alternating Series Test : AST))

อนุกรมสลับ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ถ้าสอดคล้อง 2 เงื่อนไขต่อไปนี้

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \text{และ} \quad \{a_n\} \text{ เป็นลำดับลด หรือมี } n_0 \in \mathbb{N} \text{ ซึ่ง } a_{n+1} < a_n \text{ ทุก } n \geq n_0$$

ตัวอย่าง 1.6.3 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$$

ตัวอย่าง 1.6.4 จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

แบบฝึกหัด 1.6

1. จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์หรือลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

$$1.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$1.6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

$$1.2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$1.7 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{4^n + 3^n}$$

$$1.3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\ln(n+2)}$$

$$1.8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \arctan n}{4n^3 - 1}$$

$$1.4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{\ell n}}$$

$$1.9 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$1.5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^4 - n + 1}$$

$$1.10 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctan n$$

2. จงหาค่า p ที่ทำให้อนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้า

$$2.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$$

$$2.3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + p}$$

$$2.2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p^n}$$

$$2.4 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\ln n)^p}{n}$$

แบบฝึกหัดบทที่ 1

1. จงหาลิมิตต่อไปนี้

$$1.1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1} + n}{\sqrt{n^2 + n} + 1}$$

$$1.3 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n + 1} - n \right)$$

$$1.2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2(1-n)^3}{n(2n-1)^4}$$

$$1.4 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n$$

2. จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้เป็ลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

$$2.1 \quad \left\{ \frac{\ln n}{n^2} \right\}$$

$$2.2 \quad \left\{ \frac{n \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right)}{n+1} \right\}$$

$$2.3 \quad \left\{ \frac{(3n+1)^2}{\sqrt{n^4+4}} \right\}$$

3. จงหาลิมิตของลำดับ $\left\{ \sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots \right\}$

4. จงหาค่าผลบวกต่อไปนี้

$$4.1 \quad \sum_{k=1}^{15} (2-k)(1-k)$$

$$4.2 \quad \sum_{k=1}^{20} (2k+1)^2$$

$$4.3 \quad \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k^2 + 4k + 3}$$

$$4.4 \quad 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 100^2$$

$$4.5 \quad 2 + (2+4) + (2+4+6) + \dots + (2+4+6+\dots+100)$$

5. จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็อนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาผลบวกของอนุกรมนั้น

$$5.1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+4)}$$

$$5.3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5^n} + \left(-\frac{2}{3} \right)^n \right)$$

$$5.2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^4+n+1}}{n^2+3}$$

$$5.4 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^n+1)^2}{5^n}$$

6. จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็อนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

$$6.1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{(2n+3)^2}$$

$$6.3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{n^2+1} + n^{-n} \right)$$

$$6.2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sec^4 n}{\sqrt[3]{n}}$$

$$6.4 \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^3 3^{-n}$$

$$6.5 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n}{n+1} \right)^2$$

$$6.6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \ln n}{n(n+1)^3}$$

$$6.7 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

$$6.8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{\sqrt{n^7 + 3}}$$

$$6.9 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2 + n + 1} - n \right)$$

$$6.10 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-1}$$

$$6.11 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$$

$$6.12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\ln(n+3)}$$

$$6.13 \sum_{n=1}^{\infty} n4^{-n^2}$$

$$6.14 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n - n}$$

$$6.15 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \frac{2}{2n+1} \right)$$

$$6.16 \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)^{-\ln(e^n+n)}$$

$$6.17 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n+4)}$$

$$6.18 \sum_{n=1}^{\infty} (\pi - 2\arctan n)$$

$$6.19 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln(n+1)}$$

$$6.20 \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n^2} n^n$$

$$6.21 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n\sqrt[4]{n}}$$

$$6.22 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(3^n + 1)}$$

$$6.23 \sum_{n=1}^{\infty} (3 + \cos n)^{-n}$$

$$6.24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}$$

$$6.25 \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n+10}{n+5} \right)$$

$$6.26 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^4 + 1} - n^2 \right)$$

$$6.27 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n^2 + 1}}$$

$$6.28 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n!}$$

$$6.29 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2 + \ln n)^2}$$

$$6.30 \sum_{n=1}^{\infty} 9^{-\ln n}$$

$$6.31 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{3^n - n}$$

$$6.32 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}2^n + 1}$$

$$6.33 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{3^n}{4^n - 1} \right)$$

$$6.34 \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{5}{4} \right)^{-n}$$

$$6.35 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n+1} + 1 \right)^{-2n}$$

$$6.36 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + \ln n}$$

$$6.37 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2^n}$$

$$6.38 \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n^3}$$

$$6.39 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n!}{3^n} + \frac{\cos^2 n}{4^n} \right)$$

$$6.40 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^9}{n^3(n+2)^{10}}$$

$$6.41 \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{1}{n} \right)$$

$$6.42 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(5)(7)(9) \cdots (2n+3)}$$

$$6.43 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2)(4)(6) \cdots (2n)}{n!}$$

$$6.44 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(1)(3)(5) \cdots (2n-1)}{(2n-1)!}$$

$$6.45 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}$$

$$6.46 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$

$$6.47 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \ln n}$$

$$6.48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{3^n}$$

$$6.49 \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \left(\frac{1}{n^3} \right)$$

$$6.50 \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-\ln(e^n+1)}$$

$$6.51 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n!)}{n!}$$

$$6.52 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n-3n^2}{\sqrt{n^6+2}}$$

$$6.53 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln(n+2)}{n}$$

$$6.54 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin^2 n}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

$$6.55 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sin n}$$

$$6.56 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\sqrt{n^2+1} - n \right) \cos n \right]^n$$

$$6.57 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n!}$$

$$6.58 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1} \right)^n$$

$$6.59 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 - \cos n}{n^{\frac{2}{3}} - 2}$$

$$6.60 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}$$

$$6.61 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+3+5+\cdots+(2n-1)}$$

$$6.62 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}$$

$$6.63 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+n^2+1} - n \right)$$

$$6.64 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n!}$$

7. จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์หรือลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

$$7.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$$

$$7.2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n}$$

$$7.3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(e^n+1)}$$

$$7.4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{\ln(n+2)}$$

$$7.5 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right)$$

$$7.6 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{\frac{1}{n}}$$

$$7.7 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n + \ln n}$$

$$7.8 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan \left(\frac{\pi}{n} \right)$$

$$7.9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi}{1 + \sqrt{n}}$$

$$7.10 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos n \pi}{2^n}$$

8. จงหาจำนวนจริง x ที่ทำให้อนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้า

$$8.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^n}$$

$$8.2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3x)^n}{2^n}$$

9. จงหาเงื่อนไขของจำนวนจริง p ซึ่งทำให้อนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^p}$$

เป็นอนุกรมลู่เข้าและเป็นอนุกรมลู่ออก

บทที่ 2

อนุกรมกำลัง

อนุกรมกำลัง (power series) รอบจุด a เมื่อ $a \in \mathbb{R}$ คืออนุกรมอนันต์ในรูป

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

เรียก a ว่า จุดศูนย์กลางของอนุกรมกำลัง (center of power series)

และเรียก $c_n \in \mathbb{R}$ ว่า สัมประสิทธิ์ของอนุกรมกำลัง (coefficients of power series)

หมายเหตุ อนุกรมกำลังเป็นอนุกรมลู่เข้า c_0 เมื่อ $x = a$ เสมอ

2.1 รัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้า

ตัวอย่าง 2.1.1 จงหา x ที่ทำให้ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ทฤษฎีบท 2.1.2 สำหรับอนุกรมกำลัง

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

จะเป็นไปตามกรณีใดกรณีหนึ่งใน 3 กรณีนี้เท่านั้น

1. อนุกรมลู่เข้าเฉพาะเพียงจุดเดียวที่จุดศูนย์กลาง a
2. มีจำนวนจริงบวก R ที่ทำให้
อนุกรมลู่เข้าทุกค่า x ซึ่ง $|x-a| < R$ และ อนุกรมลู่ออกทุกค่า x ซึ่ง $|x-a| > R$
3. อนุกรมลู่เข้าทุกค่า $x \in \mathbb{R}$

บทนิยาม 2.1.3 จำนวน R ในทฤษฎีบท ?? ข้อ 2 เรียกว่า **รัศมีแห่งการลู่เข้า** (radius of convergence) ของอนุกรมกำลัง ในข้อ 1 ให้ $R = 0$ และในข้อ 3 ให้ $R = \infty$

บทนิยาม 2.1.4 เรียงเซต

$$\left\{ x : \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้า} \right\}$$

ว่า **ช่วงแห่งการลู่เข้า** (interval of convergent) ของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$

จะได้อันอนุกรมกำลังที่มีรัศมีแห่งการลู่เข้า R มีช่วงแห่งการลู่เข้าแบบใดแบบหนึ่งเท่านั้น

$$(a-R, a+R), (a-R, a+R], [a-R, a+R), [a-R, a+R] \text{ และ } (-\infty, \infty)$$

ตัวอย่าง 2.1.5 จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n!}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$$

ตัวอย่าง 2.1.6 จงหาค่าและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n2^n}$

ตัวอย่าง 2.1.7 จงหา x ที่ทำให้ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{9^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ทฤษฎีบท 2.1.8 ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-a)^n$ เป็นอนุกรมกำลัง สมมติว่ามี $n_0 \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $c_n \neq 0$ ทุก ๆ $n \geq n_0$ จะได้ว่ารัศมีแห่งการลู่เข้าคือ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \quad \text{หรือ} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$$

ตัวอย่าง 2.1.9 จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-1)^n}{n}$

แบบฝึกหัด 2.1

1. จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

$$1.1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^n$$

$$1.10 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^n}{n 4^n}$$

$$1.2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{2^n}$$

$$1.11 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n+1}}{n^2 4^n}$$

$$1.3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^n}{3^n}$$

$$1.12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n \cdot 27^n}$$

$$1.4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n(x-3)}{\cos n} \right)^n$$

$$1.13 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$$

$$1.5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(x-2)^n}{n^4 + 1}$$

$$1.14 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$

$$1.6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{n^2 + 1}$$

$$1.15 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{n \sqrt{n}}$$

$$1.7 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-e)^n}{n e^n}$$

$$1.16 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^n}{4^n \ell \ln n}$$

$$1.8 \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n^2} x^n$$

$$1.17 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x-3)^n}{n^3}$$

$$1.9 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{5^n}$$

$$1.18 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

2. จงหาโดเมนของ **ฟังก์ชันเบสเซล (Bessel function)** อันดับ 0 และ 1 ที่กำหนดโดย

$$2.1 \quad J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}$$

$$2.2 \quad J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n! (n+1)! 2^{2n+1}}$$

2.2 ฟังก์ชันในรูปอนุกรมกำลัง

บทนิยาม 2.2.1 ให้อนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ ลู่เข้าบนช่วง I

ถ้าอนุกรมนี้มีผลบวกเป็น $f(x)$ ทุก ๆ $x \in I$ นั่นคือ

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \quad \text{ทุก ๆ } x \in I$$

เรียก f ว่า **ฟังก์ชันผลบวก (sum function)** ของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ บน I

ต่อไปเราจะใช้อนุกรมเรขาคณิต (เป็นอนุกรมกำลังรอบจุด 0)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{เมื่อ } |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \quad \text{เมื่อ } |x| < 1$$

เป็นเครื่องมือสำคัญในการหาฟังก์ชันผลบวกดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.2.2 จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2}$$

ตัวอย่าง 2.2.3 จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1. $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} (2x-1)^n$

ตัวอย่าง 2.2.4 จงหาอนุกรมกำลังที่มีฟังก์ชันผลบวกต่อไปนี้

1. $\frac{1}{1-2x}$

2. $\frac{1}{1+x^2}$

ตัวอย่าง 2.2.5 จงหาอนุกรมกำลังที่มีฟังก์ชันผลบวกต่อไปนี้

1. $\frac{1}{x^2 + 4}$

2. $\frac{x}{x^2 - 1}$

3. $\frac{1}{x^2 + 2x + 2}$

บทนิยาม 2.2.6 กำหนดให้

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \quad \text{บนช่วง } (a-R, a+R)$$

เมื่อ R เป็นรัศมีแห่งการลู่อเข้าของอนุกรมนี้ จะได้ว่า f มีอนุพันธ์ทุกค่า $x \in (a-R, a+R)$ และ

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n(x-a)^{n-1} \quad \text{ทุกค่า } x \in (a-R, a+R)$$

เมื่อ C เป็นค่าคงตัว จะได้ว่า

$$\int f(x) dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

ตัวอย่าง 2.2.7 จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

$$2. \sum_{n=2}^{\infty} n^2 x^{n+2}$$

ตัวอย่าง 2.2.8 จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1.
$$\sum_{n=1}^{\infty} n3^n(-x)^{n+1}$$

2.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n+1}$$

ตัวอย่าง 2.2.9 จงหาอนุกรมกำลังที่มีฟังก์ชันผลบวกเป็น $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

ตัวอย่าง 2.2.10 จงหาอนุกรมกำลังที่มีฟังก์ชันผลบวกเป็น $f(x) = \frac{x^2}{(1-4x^2)^2}$

ตัวอย่าง 2.2.11 ให้ $f(x) = \ln(x+1)$

1. จงหาอนุกรมกำลังซึ่งมีฟังก์ชันผลบวกเป็น $f(x)$
2. จงแสดงว่า $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

ตัวอย่าง 2.2.12 ให้ $f(x) = \arctan x$

1. จงหาอนุกรมกำลังที่มีฟังก์ชันผลบวกเป็น $f(x)$

2. จงแสดงว่า $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

แบบฝึกหัด 2.2

1. จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

$$1.1 \sum_{n=1}^{\infty} (-3)^{n-1} nx^n$$

$$1.5 \sum_{n=1}^{\infty} n(2x)^n$$

$$1.2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)x^n}{2}$$

$$1.6 \sum_{n=0}^{\infty} nx^{3n}$$

$$1.3 \sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n-1}$$

$$1.7 \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1} x^{n+1}$$

$$1.4 \sum_{n=0}^{\infty} n(-x)^{n-1}$$

$$1.8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n+1}$$

2. จงหาอนุกรมกำลังที่มีฟังก์ชันผลบวกพร้อมทั้งช่วงแห่งการลู่เข้า

$$2.1 f(x) = \frac{2}{3-2x}$$

$$2.7 f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2}$$

$$2.2 f(x) = \frac{3}{1-x^4}$$

$$2.8 f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$$

$$2.3 f(x) = \frac{1}{x+10}$$

$$2.9 f(x) = -\frac{x^3}{(1+x)^2}$$

$$2.4 f(x) = \frac{x}{9+x^2}$$

$$2.10 f(x) = \frac{1}{(1-x)^4}$$

$$2.5 f(x) = \frac{1+x}{1+x}$$

$$2.11 f(x) = \frac{x}{(1-x^2)^2}$$

$$2.6 f(x) = \frac{x}{2x^2+1}$$

$$2.12 f(x) = \frac{x^2}{(1-5x)^2}$$

3. จงหาอนุกรมกำลังที่มีฟังก์ชันผลบวกพร้อมทั้งช่วงแห่งการลู่เข้า

$$3.1 f(x) = \ln(5-x)$$

$$3.5 f(x) = \left(\frac{x}{2-x}\right)^3$$

$$3.2 f(x) = x \ln(x+1)$$

$$3.3 f(x) = x^2 \arctan(x^3)$$

$$3.6 f(x) = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$$

$$3.4 f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2}$$

2.3 ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์

บทนิยาม 2.3.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์ที่จุด a ถึงอันดับที่ n จะกล่าวว่า $T_n(x)$ เป็น **พหุนามเทย์เลอร์** (Taylor polynomial) ดีกรี n ของ f ที่จุด $x = a$ ก็ต่อเมื่อ

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

ในกรณีที่ $a = 0$ จะเรียกว่า **พหุนามแมคลอริน** (Maclaurin polynomial) นั่นคือ

$$T_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

ตัวอย่าง 2.3.2 จงหาพหุนามแมคลอรินดีกรี 5 ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = e^x$

2. $f(x) = \sin x$

ตัวอย่าง 2.3.3 จงหาพหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 4 รอบจุด $x = 1$ ของ $f(x) = \ln x$

ทฤษฎีบท 2.3.4 ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ (Taylor's Theorem)

ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์ถึงอันดับที่ $n + 1$ บนช่วงเปิด I สำหรับ $x, a \in I$ จะได้ว่ามี c อยู่ระหว่าง a กับ x ที่ทำให้

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

เมื่อ $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - a)^{n+1}$ เรียกว่า **เศษเหลือ** (remainder)

หมายเหตุ ความผิดพลาด $R_n(x)$ โดยที่

$$|R_n(x)| < 0.\underbrace{000\dots0}_{r+1}5$$

จะบอกค่าประมาณความถูกต้องอย่างน้อยทศนิยม r ตำแหน่ง

ตัวอย่าง 2.3.5 ให้ $f(x) = \sqrt{x}$ จงหาประมาณค่าของ $\sqrt{2}$ โดยใช้พหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 3 ของ f รอบจุด $x = 1$ พร้อมทั้งหาขอบเขตความผิดพลาด

ตัวอย่าง 2.3.6 ให้ $f(x) = \ln(x + 1)$ จงหาประมาณค่าของ $\ln(1.5)$ โดยใช้พหุนามแมคลอรินดีกรี 7 ของ f พร้อมทั้งบอกค่าประมาณนี้ว่าถูกต้องอย่างน้อยทศนิยมกี่ตำแหน่ง

ตัวอย่าง 2.3.7 ให้ $f(x) = x \sin x$ จงหาประมาณค่าของ $\int_0^1 f(x) dx$ โดยใช้พหุนามแมคลอรินดีกรี 5 ของ f พร้อมทั้งหาขอบเขตความผิดพลาด

แบบฝึกหัด 2.3

1. จงหาพหุนามเทย์เลอร์ $T_n(x)$ ของฟังก์ชันต่อไปนี้ รอบจุด a
 - 1.1 $f(x) = \sin x$ เมื่อ $a = 0$ และ $n = 9$
 - 1.2 $f(x) = \cos x$ เมื่อ $a = 0$ และ $n = 8$
 - 1.3 $f(x) = \ln(x+1)$ เมื่อ $a = 0$ และ $n = 6$
 - 1.4 $f(x) = \sqrt{x+1}$ เมื่อ $a = 3$ และ $n = 5$
 - 1.5 $f(x) = e^{x^2}$ เมื่อ $a = 0$ และ $n = 6$
 - 1.6 $f(x) = x^2 \ln x$ เมื่อ $a = 1$ และ $n = 4$
 - 1.7 $f(x) = 4x^3 + 5x^2 - 3x + 1$ เมื่อ $a = 1$ และ $n = 3$
 - 1.8 $f(x) = \ln(\cos x)$ เมื่อ $a = \frac{\pi}{4}$ และ $n = 3$
 - 1.9 $f(x) = x \cos x$ เมื่อ $a = 0$ และ $n = 7$
 - 1.10 $f(x) = x^2 \sin x$ เมื่อ $a = 0$ และ $n = 7$
2. จงหาค่าประมาณของค่าต่อไปนี้ โดยใช้พหุนามเทย์เลอร์ที่ทำให้คำตอบถูกต้องอย่างน้อย 3 ทศนิยมตำแหน่งที่ 3
 - 2.1 $\sin 12^\circ$
 - 2.2 $\cos 12^\circ$
 - 2.3 $\ln(1.02)$
 - 2.4 $\sqrt{4.2}$
 - 2.5 $e^{0.5}$
 - 2.6 $\sqrt[3]{7.9}$
3. ให้ $f(x) = \sqrt{x+1}$ จงหาประมาณค่าของ $\sqrt{1.2}$ โดยใช้พหุนามแมคลอรินดีกรี 5 ของ f พร้อมทั้งหาขอบเขตความผิดพลาด
4. ให้ $f(x) = e^x$ จงหาประมาณค่าของ $\int_0^{0.6} e^{-x^2} dx$ โดยใช้พหุนามแมคลอรินดีกรี 4 ของ f พร้อมทั้งหาขอบเขตความผิดพลาด

2.4 อนุกรมเทย์เลอร์

สมมติว่า f เป็นฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ โดยที่ $|x-a| < R$ จะได้ว่า

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \cdots \quad (2.1)$$

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots \quad (2.2)$$

$$f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x-a) + 3 \cdot 4c_4(x-a)^2 + \cdots \quad (2.3)$$

$$f'''(x) = 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4(x-a) + \cdots \quad (2.4)$$

เมื่อแทน $x = a$ ในสมการ (2.1)-(2.4) จะได้

$$c_0 = f(a), \quad c_1 = f'(a), \quad c_2 = \frac{f''(a)}{2!} \quad \text{และ} \quad c_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ เมื่อ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

บทนิยาม 2.4.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์ทุกอันดับ และ f มีค่าที่จุด a อนุกรมที่เขียนในรูป

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

หรือ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

เรียกว่า **อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series)** ของ f รอบจุด a

ในกรณีที่ $a = 0$ จะเรียกว่า **อนุกรมแมคลอริน (Maclaurin series)** นั่นคือ

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots \quad \text{หรือ} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

ตัวอย่าง 2.4.2 จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(x) = \frac{1}{x}$ รอบจุด 1

ทฤษฎีบท 2.4.3 ให้ $T_n(x)$ เป็นพหุนามเทย์เลอร์ดีกรี n ของ f รอบจุด a

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

สำหรับ $|x - a| < R$ เมื่อ R คือรัศมีแห่งการลู่อเข้าของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$ จะได้ว่า

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = 0$$

ตัวอย่าง 2.4.4 จงหาอนุกรมแมคลอรินของฟังก์ชัน $f(x) = e^x$

ตัวอย่าง 2.4.5 จงหาอนุกรมแมคลอรินของฟังก์ชัน

1. $f(x) = \sin x$

2. $f(x) = \cos x$

ตารางอนุกรมเทย์เลอร์

$\frac{1}{1-x}$	$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$	$R = 1$
e^x	$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$R = \infty$
$\sin x$	$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	$R = \infty$
$\cos x$	$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$R = \infty$
$\arctan x$	$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$	$R = 1$
$\ln(x+1)$	$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$	$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$R = 1$
$(1+x)^k$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$	$= 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!} x^2 + \dots$	$R = 1$

ตัวอย่าง 2.4.6 จงใช้อนุกรมแมคลอรินของ e^x หาค่าลิมิตของ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

ตัวอย่าง 2.4.7 จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน $f(x) = x \ln x$ รอบจุด 1

ตัวอย่าง 2.4.8 จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$

แบบฝึกหัด 2.4

1. จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ รอบจุด a

$$1.1 \quad f(x) = \ln(1-x) \quad \text{เมื่อ } a = 0$$

$$1.2 \quad f(x) = \cos x \quad \text{เมื่อ } a = \pi$$

$$1.3 \quad f(x) = \sqrt{x} \quad \text{เมื่อ } a = 1$$

$$1.4 \quad f(x) = \sqrt[3]{x} \quad \text{เมื่อ } a = 1$$

$$1.5 \quad f(x) = \sqrt[3]{x+2} \quad \text{เมื่อ } a = -1$$

$$1.6 \quad f(x) = \frac{1}{3-x} \quad \text{เมื่อ } a = 2$$

$$1.7 \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{เมื่อ } a = 0$$

$$1.8 \quad f(x) = \sqrt{x+1} \quad \text{เมื่อ } a = 3$$

2. จงหาอนุกรมแมคลอรินของฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยใช้ตารางอนุกรมเทย์เลอร์

$$2.1 \quad f(x) = \sin(x^2)$$

$$2.5 \quad f(x) = e^x + e^{2x}$$

$$2.2 \quad f(x) = x^2 \cos x$$

$$2.6 \quad f(x) = x \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$$

$$2.3 \quad f(x) = x \ln(x-1)$$

$$2.7 \quad f(x) = x^2 \ln(1+x^3)$$

$$2.4 \quad f(x) = \sin^2 x$$

$$2.8 \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$$

3. จงหาอนุกรมแมคลอรินของฟังก์ชัน $f(x) = (x+1)^k$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริง

4. จงฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมต่อไปนี้

$$4.1 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(2n)!}$$

$$4.2 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{n!}$$

5. จงใช้อนุกรมแมคลอรินหาค่าลิมิตของ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$

แบบฝึกหัดบทที่ 2

1. จงหาหาค่าและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

$$1.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\ln(n+1)}$$

$$1.4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n(x+1)^n}{4^n}$$

$$1.2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)!}$$

$$1.5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^{2n}}{n+1}$$

$$1.3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x+1)^n}{n!}$$

$$1.6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{5^n \cdot n^2}$$

2. จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

$$2.1 \sum_{n=1}^{\infty} n(-3x)^{n+1}$$

$$2.3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n x^{2n+2}}{2n+1}$$

$$2.2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{2^n}$$

$$2.4 \sum_{n=1}^{\infty} n(-3x)^{n+1}$$

3. จงหาอนุกรมกำลังที่มีฟังก์ชันผลบวกพร้อมทั้งช่วงแห่งการลู่เข้า

$$3.1 f(x) = \frac{1}{1+3x}$$

$$3.5 f(x) = \frac{x+2}{2x^2-x-1}$$

$$3.2 f(x) = \frac{x}{2x-2}$$

$$3.6 f(x) = \frac{1}{x^2+2x+2}$$

$$3.3 f(x) = \frac{x^4}{(1-2x^2)^2}$$

$$3.7 f(x) = \frac{1}{(1-x)^4}$$

$$3.4 f(x) = \left(\frac{x}{2-x} \right)^3$$

$$3.8 f(x) = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

4. จงหาพหุนามเทย์เลอร์ $T_5(x)$ ของฟังก์ชัน

$$f(x) = 10x^5 + 4x^3 - x^2 + 2x + 1$$

รอบจุด 1 พร้อมทั้งพิจารณาว่า $T_5(x)$ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเดียวกันหรือไม่

5. ให้ $f(x) = \sqrt[3]{x}$ จงประมาณค่าของ $\sqrt[3]{7.99}$ โดยใช้พหุนามแมคลอรินดีกรี 5 ของ f พร้อมทั้งหาขอบเขตความผิดพลาด

6. ให้ $f(x) = x \cos x$ จงประมาณค่าของ $\int_0^1 f(x) dx$ โดยใช้พหุนามแมคลอรินดีกรี 5 ของ f พร้อมทั้งหาขอบเขตความผิดพลาด

7. จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของ

$$f(x) = \frac{1}{3-2x} \quad \text{รอบจุด } 0$$

และหาอนุกรมกำลังของฟังก์ชัน f พร้อมทั้งตรวจสอบว่าอนุกรมที่ได้เท่ากันหรือไม่

8. จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ $f(x) = x \ln(2-x)$ รอบจุด 1 โดยใช้ตารางอนุกรมเทย์เลอร์

9. จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ $f(x) = \sin^2 x$ รอบจุด 0 โดยใช้ตารางเทย์เลอร์

10. จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^{4n+3}}{(2n)!}$

11. จงใช้อนุกรมเทย์เลอร์หาค่าลิมิตของ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3}$

บทที่ 3

ปริภูมิสามมิติ

3.1 ระบบพิกัดฉากในปริภูมิสามมิติ

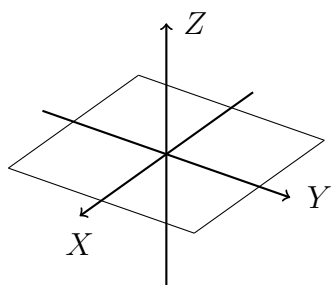
การบอกตำแหน่งของจุดใน **ปริภูมิสามมิติ** (three-dimensional space) ทำได้จากการอ้างอิงเส้นตรงสามเส้นคือ แกน X แกน Y และแกน Z ซึ่งตัดกันที่จุด O เรียกว่า **จุดกำเนิด** (origin) และเรียก

ระนาบที่ผ่าน แกน X และแกน Y ว่า ระนาบ XY (XY-plane)

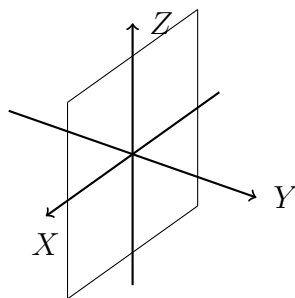
ระนาบที่ผ่าน แกน X และแกน Z ว่า ระนาบ XZ (XZ-plane)

ระนาบที่ผ่าน แกน Y และแกน Z ว่า ระนาบ YZ (YZ-plane)

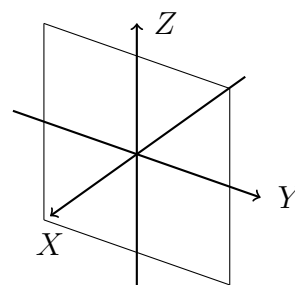
รูปที่ 3.1: ระนาบ XY, XZ และ YZ



ระนาบ XY



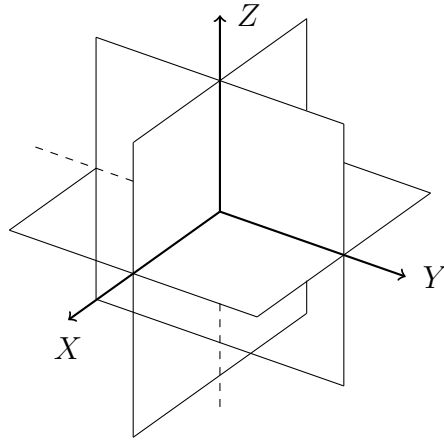
ระนาบ XZ



ระนาบ YZ

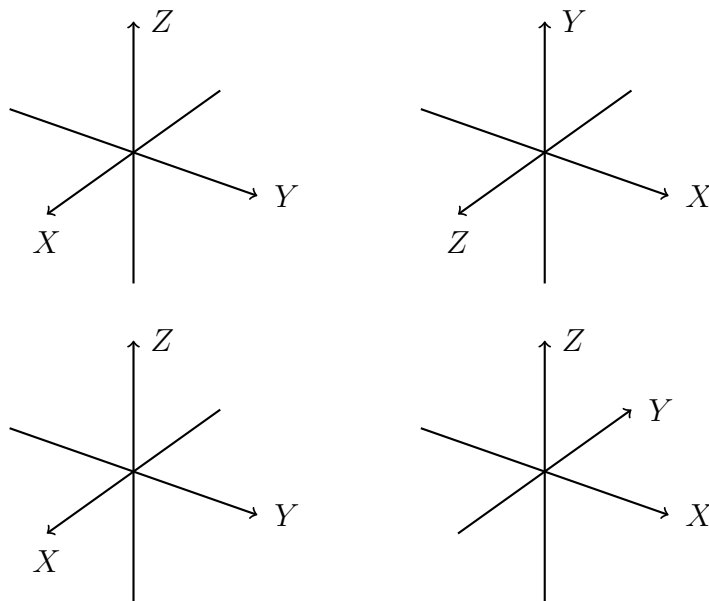
ระนาบพิกัดจากทั้งสามจะแบ่งปริภูมิสามมิติออกเป็น 8 ส่วนเรียกว่า **อัฐภาค (Octance)**

รูปที่ 3.2: แสดงการแบ่งอัฐภาค



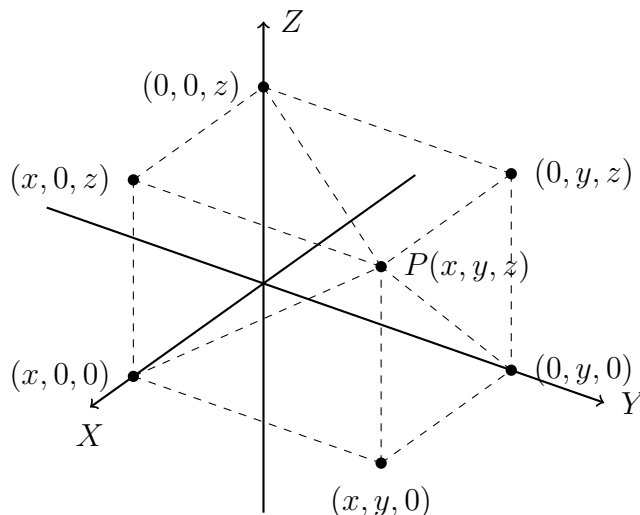
การเลือกทิศทางที่เป็นบวกของพิกัดฉาก เรายินยอมใช้กฎมือขวาโดยให้นิ้วหัวแม่มือไปทางแกน Z บวก นิ้วชี้ ไปทางแกน X บวก และนิ้วกลาง ชี้ไปทางแกน Y บวก ตั้งฉากกันเสมอ ตัวอย่างดังรูปต่อไปนี้ เราจะเลือกใช้แบบใดแบบหนึ่งตามความเหมาะสม

รูปที่ 3.3: แสดงการตั้งแกนในปริภูมิสามมิติ



การบอกตำแหน่งของจุด P ในปริภูมิสามมิติ มีแกนพิกัดเป็นที่อ้างอิงบอกได้โดยใช้จำนวนจริง (x, y, z) เรียกว่าพิกัดฉากของจุด P และใช้ $\mathbb{R}^3$ แทนเซตของจุด (x, y, z) ในปริภูมิสามมิติ

รูปที่ 3.4: แสดงจุด P และภาพฉายต่าง ๆ ของ P



จากจุด $P(x, y, z)$ ลากขนานระนาบ XY ไปยังแกน Z จะได้จุด $(0, 0, z)$

เรียกจุดนี้ว่า **ภาพฉาย (projection)** ของ P แกน Z

จากจุด $P(x, y, z)$ ลากขนานระนาบ YZ ไปยังแกน X จะได้จุด $(x, 0, 0)$

เรียกจุดนี้ว่า **ภาพฉาย** ของ P แกน X

จากจุด $P(x, y, z)$ ลากขนานระนาบ XZ ไปยังแกน Y จะได้จุด $(0, y, 0)$

เรียกจุดนี้ว่า **ภาพฉาย** ของ P แกน Y

จากจุด $P(x, y, z)$ ลากขนานแกน Z ไปที่ระนาบ XY จะได้จุด $(x, y, 0)$

เรียกจุดนี้ว่า **ภาพฉาย** ของ P บนระนาบ XY

จากจุด $P(x, y, z)$ ลากขนานแกน X ไปที่ระนาบ YZ จะได้จุด $(0, y, z)$

เรียกจุดนี้ว่า **ภาพฉาย** ของ P บนระนาบ YZ

จากจุด $P(x, y, z)$ ลากขนานแกน Y ไปที่ระนาบ XZ จะได้จุด $(x, 0, z)$

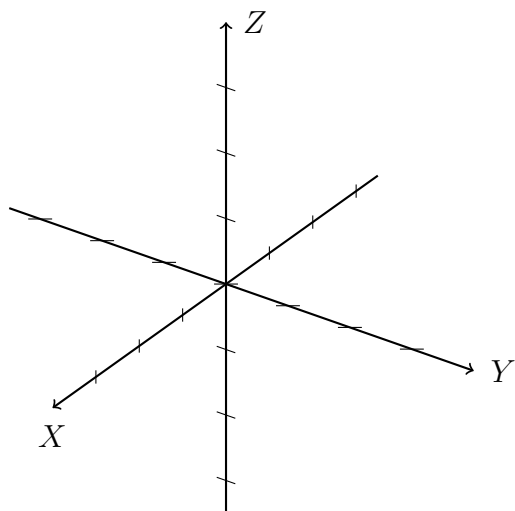
เรียกจุดนี้ว่า **ภาพฉาย** ของ P บนระนาบ XZ

ตัวอย่าง 3.1.1 จงหาภาพฉายทั้งหมดของจุด $P(1, 2, 3)$

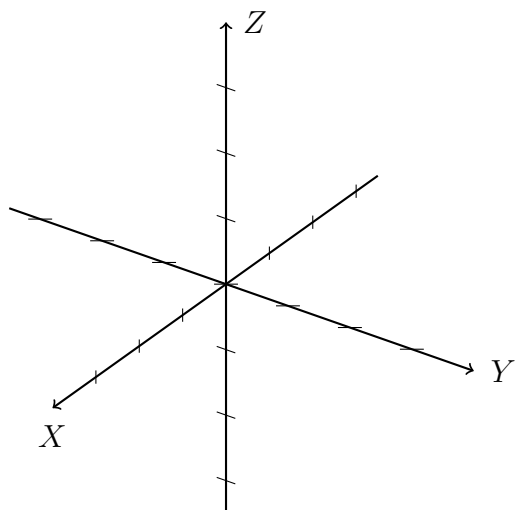
1. ภาพฉายบนระนาบ XY ของจุด P คือ
2. ภาพฉายบนระนาบ XZ ของจุด P คือ
3. ภาพฉายบนระนาบ YZ ของจุด P คือ
4. ภาพฉายบนแกน X ของจุด P คือ
5. ภาพฉายบนแกน Y ของจุด P คือ
6. ภาพฉายบนแกน Z ของจุด P คือ

ตัวอย่าง 3.1.2 จงเขียนจุดต่อไปนี้ในปริภูมิสามมิติ

1. $P(1, 2, 3)$



2. $Q(1, -2, 2)$



แบบฝึกหัด 3.1

1. จงเขียนกราฟในปริภูมิสามมิติแสดงจุดดังต่อไปนี้

1.1 $A(5, 0, 0)$

1.5 $E(1, 1, 3)$

1.2 $B(0, 2, 1)$

1.6 $F(-4, 2, -3)$

1.3 $C(3, 1, 0)$

1.7 $G(2, 1, -2)$

1.4 $D(-3, 0, 2)$

1.8 $H(3, -2, 6)$

2. จงหาภาพฉายของจุด P บนระนาบ XY, XZ และ YZ

2.1 $P(3, 1, 2)$

2.3 $P(4, -1, 0)$

2.2 $P(1, 2, -2)$

2.4 $P(-8, 9, 7)$

3. จงหาภาพฉายของจุด P บนแกน X, Y และ Z

3.1 $A(5, 0, 0)$

3.3 $C(3, 1, 0)$

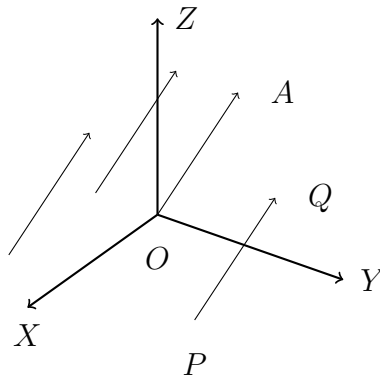
3.2 $B(0, 2, 1)$

3.4 $D(-3, 0, 2)$

3.2 เวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ

เวกเตอร์ (vector) คือปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง โดยทั่วไปใช้ส่วนของเส้นตรงเชื่อมโยงกันระหว่างจุดสองจุดและมีลูกศรกำกับแทนเวกเตอร์ และความยาวของเส้นตรงแทนขนาดของเวกเตอร์ ใช้สัญลักษณ์ $\overrightarrow{PQ}$ แทนเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด P สิ้นสุดที่จุด Q มีทิศทางจาก P ไป Q และใช้ $\|\overrightarrow{PQ}\|$ แทนความยาวหรือขนาด (length/magnitude/norm) ของ $\overrightarrow{PQ}$ และเวกเตอร์ทั้งสองจะเท่ากันก็ต่อเมื่อทั้งสองมีขนาดเท่ากันและทิศทางเดียวกัน

รูปที่ 3.5: เวกเตอร์ที่เท่ากับ $\|\overrightarrow{PQ}\|$

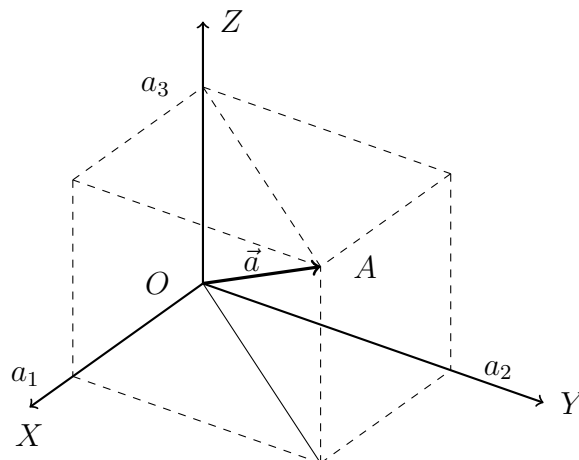


บทนิยาม 3.2.1 กำหนดให้ $P(x_1, y_1, z_1)$ และ $Q(x_2, y_2, z_2)$ แล้ว $\vec{a}$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่ง (position vector) ของ $\overrightarrow{PQ}$ คือ

$$\vec{a} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

ถ้า $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$ และ $a_3 = z_2 - z_1$ ดังนั้น $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ เรียก a_1 , a_2 และ a_3 ว่า **ส่วนประกอบ (component)** ของ $\vec{a}$ ตามแกน X แกน Y และ แกน Z ตามลำดับ

รูปที่ 3.6: แสดงเวกเตอร์ $\vec{a}$ ในปริภูมิสามมิติ



จากรูปโดยใช้ความสัมพันธ์ของสามเหลี่ยมมุมฉากจะได้ว่า

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

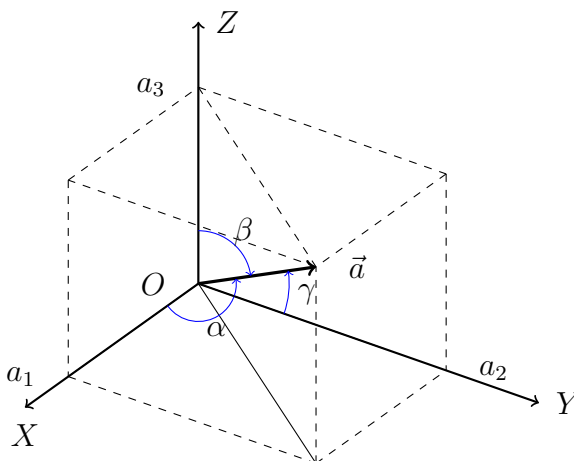
บทนิยาม 3.2.2 เวกเตอร์ที่มีตัวประกอบทุกตัวเป็นศูนย์เรียกว่า **เวกเตอร์ศูนย์** (zero vector) เขียนแทนด้วย $\vec{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$

ข้อตกลง เมื่อ P เป็นจุดใน $\mathbb{R}^3$ และ O เป็นจุดกำเนิด เราจะเขียนเวกเตอร์ $\overrightarrow{OP}$ แทนด้วย $\vec{P}$
หมายเหตุ $\|\vec{v}\| = \|-\vec{v}\|$ และ $\|k\vec{v}\| = |k|\|\vec{v}\|$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว

มุมแสดงทิศทาง

บทนิยาม 3.2.3 ให้ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \neq \vec{0}$ เป็นเวกเตอร์ที่ทำมุม α, β, γ กับแกน X แกน Y และแกน Z ด้านบวกตามลำดับโดยที่ $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi]$ เรียก α, β, γ ว่า **มุมแสดงทิศทาง** (direction angles) ของ $\vec{a}$ และ $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ ว่า **โคไซน์แสดงทิศทาง** (direction cosines) ของ $\vec{a}$

รูปที่ 3.7: มุมแสดงทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{a}$



จากรูปจะได้ว่า $\cos\alpha = \frac{a_1}{\|\vec{a}\|}$ $\cos\beta = \frac{a_2}{\|\vec{a}\|}$ $\cos\gamma = \frac{a_3}{\|\vec{a}\|}$

ตัวอย่าง 3.2.4 จงหาเวกเตอร์ตำแหน่ง ขนาด และโคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์ $\overrightarrow{PQ}$ เมื่อ $P(1, 2, -3)$ และ $Q(-1, 0, 4)$

ตัวอย่าง 3.2.5 จงหามุมแสดงทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{a} = \langle -1, 1, \sqrt{2} \rangle$

บทนิยาม 3.2.6 ให้ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ และ $k \in \mathbb{R}$

1. $\vec{a} = \vec{b}$ ก็ต่อเมื่อ $a_1 = b_1, a_2 = b_2$ และ $a_3 = b_3$
2. $\vec{a} + \vec{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$
3. $k\vec{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$
4. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

ตัวอย่าง 3.2.7 ให้ $\vec{a} = \langle 1, -2, 5 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle -1, -4, 7 \rangle$ จงหาเวกเตอร์ต่อไปนี้

1. $\vec{a} + \vec{b}$

2. $2\vec{a} + 3\vec{b}$

3. $3\vec{a} - 2\vec{b}$

ทฤษฎีบท 3.2.8 ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ และ $c, k \in \mathbb{R}$ แล้ว

- | | | |
|--|---|---|
| 1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ | 4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ | 7. $(c + k)\vec{a} = c\vec{a} + k\vec{a}$ |
| 2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ | 5. $(ck)\vec{a} = c(k\vec{a}) = k(c\vec{a})$ | 8. $1\vec{a} = \vec{a}$ |
| 3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ | 6. $c(\vec{a} + \vec{b}) = c\vec{a} + c\vec{b}$ | 9. $0\vec{a} = \vec{0}$ |
-

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

บทนิยาม 3.2.9 เราเรียกเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยว่า **เวกเตอร์หนึ่งหน่วย** (unit vector)

ให้ $\vec{a}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ใน $\mathbb{R}^3$ และจะได้ว่า

$$\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \quad \text{เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศเดียวกับ } \vec{a}$$

$$-\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \quad \text{เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศตรงข้ามกับ } \vec{a}$$

ตัวอย่าง 3.2.10 จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของเวกเตอร์ต่อไปนี้

1. $\vec{u} = \langle 1, -2, 2 \rangle$

2. $\vec{v} = \langle 1, 1, \sqrt{2} \rangle$

3. $\vec{w} = \langle 3\sin\theta, 4\sin\theta, 5\cos\theta \rangle$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแนวแกน X แกน Y และ แกน Z คือ $\vec{i}, \vec{j}$ และ $\vec{k}$ ตามลำดับ

$$\vec{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle \quad \vec{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle \quad \vec{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

ให้ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ แล้วจะได้ว่า

$$\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = a_1\langle 1, 0, 0 \rangle + a_2\langle 0, 1, 0 \rangle + a_3\langle 0, 0, 1 \rangle = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

ผลคูณเชิงสเกลาร์

บทนิยาม 3.2.11 ให้ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$

ผลคูณเชิงสเกลาร์ (scalar product) ของ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เขียนแทนด้วย $\vec{a} \cdot \vec{b}$ นิยามโดย

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

ตัวอย่าง 3.2.12 จงหาผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$

1. $\vec{a} = \langle 3, -1, 5 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle 1, 6, -3 \rangle$

2. $\vec{a} = \langle 2, 1, -7 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle 4, 6, 2 \rangle$

3. $\vec{a} = \langle 2\sin x, \cos x, 1 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle \sin x, 2\cos x, 1 \rangle$

ทฤษฎีบท 3.2.13 ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ และ $k \in \mathbb{R}$ แล้ว

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

3. $k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$

2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$

ทฤษฎีบท 3.2.14 ให้ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ จะได้ว่า

1. $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \|\vec{b}\|^2$
 2. $\|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \|\vec{b}\|^2$
 3. $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 + \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = 2\|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{b}\|^2$
 4. $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 - \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{b}$
-

ตัวอย่าง 3.2.15 ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในปริภูมิสามมิติ จงหาค่าของ

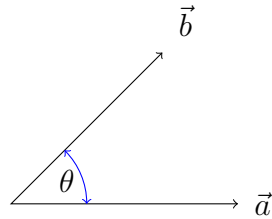
$$\|2\vec{u} + 3\vec{v}\|^2 + \|3\vec{u} - 2\vec{v}\|^2$$

มุมระหว่างเวกเตอร์

ทฤษฎีบท 3.2.16 ให้ $\vec{a} \neq \vec{0}$ และ $\vec{b} \neq \vec{0}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ แล้ว

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta$$

เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เมื่อ $0 \leq \theta \leq \pi$ ดังรูป



ข้อสังเกต $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ ตั้งฉากกัน (orthogonal) ก็ต่อเมื่อ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ หรือ $\theta = \frac{\pi}{2}$

ตัวอย่าง 3.2.17 ให้ $A(1, 2, 0)$, $B(0, 4, 2)$ และ $C(3, 2, -2)$ เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยม ABC จงหามุม $\hat{BAC}$

ตัวอย่าง 3.2.18 ให้ $\vec{a} = \langle 3, 2, -1 \rangle$, $\vec{b} = \langle 1, -1, 1 \rangle$ และ $\vec{c} = \langle 3, 4, -2 \rangle$ จงตรวจสอบว่าเวกเตอร์คู่ใดตั้งฉากกัน

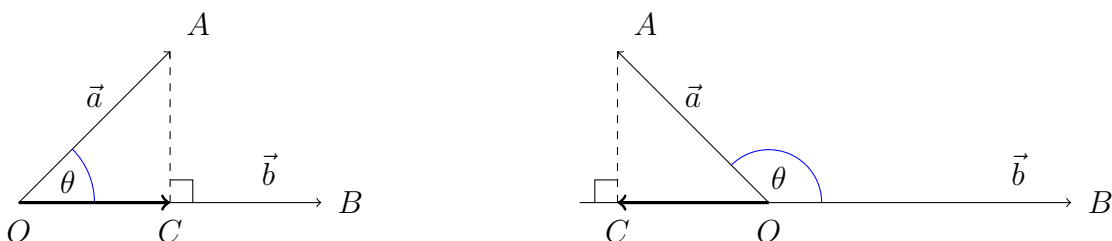
ตัวอย่าง 3.2.19 ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกัน จงหาค่าของ

$$\frac{\|3\vec{u} + 4\vec{v}\|}{\|5\vec{u} - 12\vec{v}\|}$$

ภาพฉายเวกเตอร์

บทนิยาม 3.2.20 ให้ $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ และ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ ลากเส้นตรงจาก A ไปตั้งฉากกับ $\vec{OB}$ ที่จุด C ดังรูป

รูปที่ 3.8: แสดงตัวอย่างภาพฉายเวกเตอร์



เรียก $\vec{OC}$ ว่า **ภาพฉายเวกเตอร์ (vector projection)** ของ $\vec{a}$ บน $\vec{b}$ เขียนแทนด้วย $\text{Proj}_{\vec{b}} \vec{a}$

ทฤษฎีบท 3.2.21 ให้ $\vec{a} \neq \vec{0}$ และ $\vec{b} \neq \vec{0}$ แล้วจะได้ว่า

$$\text{Proj}_{\vec{b}} \vec{a} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \right) \vec{b}$$

ตัวอย่าง 3.2.22 จงหาภาพฉายเวกเตอร์และภาพฉายสเกลาร์ของ $\vec{a}$ บน $\vec{b}$

1. $\vec{a} = \langle 1, 2, 3 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle 1, -2, -2 \rangle$

2. $\vec{a} = \langle 3, 1, 2 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle 1, -2, 4 \rangle$

ผลคูณเชิงเวกเตอร์

บทนิยาม 3.2.23 ให้ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (vector product/cross product) ของ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เขียนแทนด้วย $\vec{a} \times \vec{b}$ คือ

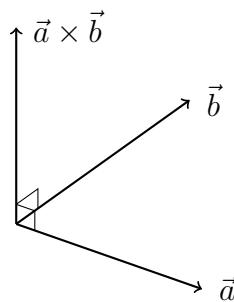
$$\vec{a} \times \vec{b} = \langle a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1 \rangle$$

หรือ

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

เมื่อ $|M|$ แทนดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์ M

รูปที่ 3.9: แสดงตัวอย่างผลคูณเชิงเวกเตอร์



ตัวอย่าง 3.2.24 กำหนดให้ $\vec{a} = \langle 1, 2, -1 \rangle$, $\vec{b} = \langle 0, 2, 1 \rangle$ และ $\vec{c} = \langle -3, 1, -1 \rangle$ จงหา

1. $\vec{a} \times \vec{b}$
2. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})$
3. $\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})$

ทฤษฎีบท 3.2.25 ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ และ $k \in \mathbb{R}$ แล้ว

- | | |
|---|---|
| 1. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ | 3. $k(\vec{a} \times \vec{b}) = (k\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k\vec{b})$ |
| 2. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ | 4. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$ |
-

บทตั้ง 3.2.26 ให้ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ จะได้ว่า

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

ทฤษฎีบท 3.2.27 ให้ $\vec{a} \neq \vec{0}$ และ $\vec{b} \neq \vec{0}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ และ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ แล้ว

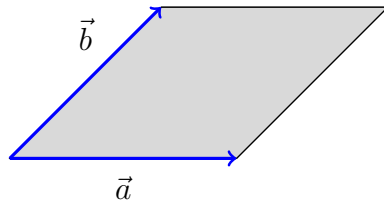
$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \theta$$

ข้อสังเกต $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ ขนานกัน (parallel) ก็ต่อเมื่อ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ หรือ $\theta = 0$ หรือ π

พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน

ทฤษฎีบท 3.2.28 ให้ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ แล้ว พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน (parallelogram) ที่มีด้านประชิดเป็น $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ มีค่าเท่ากับ $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$

รูปที่ 3.10: พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านประชิดเป็น $\vec{a}$ และ $\vec{b}$



ข้อสังเกต พื้นที่รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านประชิดเป็น $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}\|\vec{a} \times \vec{b}\|$

ตัวอย่าง 3.2.29 จงหา พื้นที่ ของ สามเหลี่ยม ที่มี จุด ยอด เป็น $A(2, -1, 2)$, $B(-1, 3, 1)$ และ $C(0, 2, -3)$

ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์

บทนิยาม 3.2.30 ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ แล้วผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์ (scalar triple products) ของ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ คือ $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$ หรือ $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ นั่นคือ

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

เมื่อ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ และ $\vec{c} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$

ตัวอย่าง 3.2.31 กำหนดให้ $\vec{a} = \langle 1, 2, 1 \rangle$, $\vec{b} = \langle 0, 1, 2 \rangle$ และ $\vec{c} = \langle -1, 0, 1 \rangle$ จงหา

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$

2. $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c}$

ทฤษฎีบท 3.2.32 ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ จะได้ว่า

1. $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 = \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ หรือกล่าวได้ว่า $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ ตั้งฉากกับ $\vec{a} \times \vec{b}$

2. $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} \times \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b}$

3. ถ้า $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = 0$ แล้ว $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ อยู่บนระนาบเดียวกัน (coplanar)

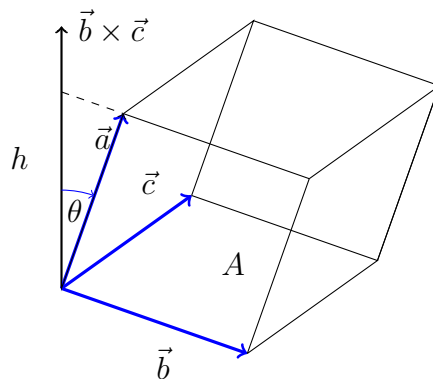
ตัวอย่าง 3.2.33 จงหาเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ $\vec{a} = \langle 1, -3, 4 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle 2, 2, 1 \rangle$

ตัวอย่าง 3.2.34 จงใช้ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์แสดงว่า $\langle 1, 4, -7 \rangle$, $\langle 2, -1, 4 \rangle$ และ $\langle 0, -9, 18 \rangle$ อยู่บนระนาบเดียวกัน

ปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนาน

ทฤษฎีบท 3.2.35 ปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนาน (parallelepiped) ซึ่งมีด้านประชิดเป็น $\vec{a}$, $\vec{b}$ และ $\vec{c}$ เท่ากับ $|\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}|$

รูปที่ 3.11: ปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนานซึ่งมีด้านประชิดเป็น $\vec{a}$, $\vec{b}$ และ $\vec{c}$



บทพิสูจน์. จากรูป 3.11 จะได้ว่า $V = Ah = \|\vec{b} \times \vec{c}\| \|\vec{a}\| \cos\theta = |\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}|$ □

ตัวอย่าง 3.2.36 จงหาปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนานซึ่งมีด้านประชิดเป็น $\langle 1, 1, -1 \rangle$, $\langle 2, 1, 0 \rangle$ และ $\langle 0, 1, 3 \rangle$

แบบฝึกหัด 3.2

1. กำหนดให้ $\vec{a} = \langle 1, 2, 0 \rangle$, $\vec{b} = \langle 1, -1, 2 \rangle$, $\vec{c} = \langle 1, 0, 3 \rangle$ และ $\vec{d} = \langle -2, 1, 5 \rangle$ จงหา

1.1 $2\vec{a} - 3\vec{b}$

1.2 $\|\vec{c} + 2\vec{d}\| + \|2\vec{a} + \vec{b}\|$

1.3 เวกเตอร์หนึ่งหน่วยของ $2\vec{c} - \vec{d}$

1.4 โคไซน์แสดงทิศทางของ $\vec{b} + \vec{c}$

1.5 มุมระหว่าง $\vec{a} + \vec{c}$ กับ $\vec{a} - \vec{c}$

1.6 $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d})$

1.7 ภาพฉายเวกเตอร์ของ $\vec{b}$ บน $\vec{c}$

1.8 เวกเตอร์ 5 หน่วยที่ตั้งฉากกับ $\vec{a}$ และ $\vec{c}$

1.9 จงหาเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ $\vec{a}$ และ $\vec{d}$

2. ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกัน จงหาค่าของ

$$\|3\vec{u} + 2\vec{v}\| + \|3\vec{u} - 5\vec{v}\|$$

3. ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ และ $c, k \in \mathbb{R}$ จงพิสูจน์ว่า

3.1 $(ck)\vec{a} = c(k\vec{a}) = k(c\vec{a})$

3.2 $c(\vec{a} + \vec{b}) = c\vec{a} + c\vec{b}$

3.3 $(c + k)\vec{a} = c\vec{a} + k\vec{a}$

3.4 $1\vec{a} = \vec{a}$

3.5 $0\vec{a} = \vec{0}$

4. ให้ $\vec{a}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ จงแสดงว่า

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \vec{a} = \vec{0}$$

5. จงหาพื้นที่สามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น $(-3, 1, 2)$, $(-5, 1, 0)$ และ $(4, -2, 1)$

6. กำหนดให้ $A(1, 1, 2)$, $B(2, 0, 3)$, $C(3, 0, 0)$ และ $D(2, 1, -1)$ จงแสดงว่ารูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน และหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมนี้

7. จงหาปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนานซึ่งมีด้านประชิดเป็น $\vec{a} = \langle 2, 1, -3 \rangle$, $\vec{b} = \langle 4, -1, 0 \rangle$ และ $\vec{c} = \langle -1, 4, -1 \rangle$

8. จงยกตัวอย่างเวกเตอร์ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ ที่ทำให้ $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

9. จงใช้ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์แสดงว่า $\langle 1, 5, -2 \rangle$, $\langle 3, -1, 0 \rangle$ และ $\langle 5, 9, -4 \rangle$ อยู่บนระนาบเดียวกัน

10. ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ จงแสดงว่า

$$10.1 \text{ ถ้า } \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \text{ แล้ว } \vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$$

$$10.2 (\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} \times \vec{b})$$

$$10.3 \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

$$10.4 \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$$

$$10.5 (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{d} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix}$$

$$10.6 \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$$

$$10.7 \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

11. ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ จงพิสูจน์ว่า

$$11.1 \vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 = \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \quad \text{หรือกล่าวได้ว่า } \vec{a} \text{ และ } \vec{b} \text{ ตั้งฉากกับ } \vec{a} \times \vec{b}$$

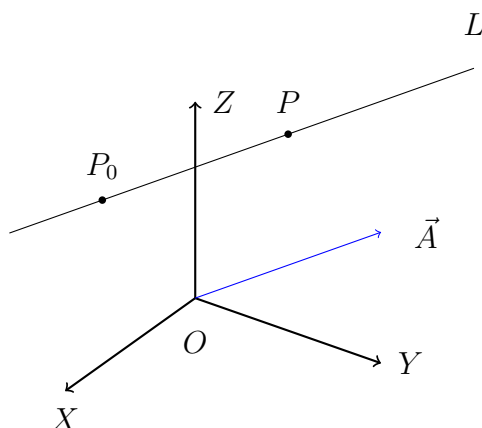
$$11.2 \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} \times \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b}$$

$$11.3 \text{ ถ้า } \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = 0 \text{ แล้ว } \vec{a}, \vec{b} \text{ และ } \vec{c} \text{ อยู่บนระนาบเดียวกัน (coplanar)}$$

3.3 เส้นตรงในปริภูมิสามมิติ

บทนิยาม 3.3.1 ให้ P_0 เป็นจุดใน $\mathbb{R}^3$ และ $\vec{A} \neq \vec{0}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ เรียกเซตของจุด P ใด ๆ ซึ่งทำให้ $\overrightarrow{P_0P}$ ขนานกับ $\vec{A}$ ว่า **เส้นตรง (Line)** ที่ผ่านจุด P_0 และขนานกับ $\vec{A}$ และเรียก $\vec{A}$ ว่า **เวกเตอร์แสดงทิศทาง (direction vector)** ของเส้นตรง

รูปที่ 3.12: เส้นตรงในปริภูมิสามมิติ



เนื่องจาก $\overrightarrow{P_0P}$ ขนานกับ $\vec{A}$ ดังนั้นจะได้ว่ามี $t \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{A} \quad \text{หรือ} \quad \vec{P} = \vec{P_0} + t\vec{A} \quad (3.1)$$

ถ้ากำหนดจุด $P(x, y, z)$ และ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ และ $\vec{A} = \langle a, b, c \rangle$ ดังนั้น

$$\langle x, y, z \rangle = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle + t\langle a, b, c \rangle = \langle x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct \rangle \quad (3.2)$$

เรียกสมการ (3.1) หรือ (3.2) ว่า **สมการเวกเตอร์ (vector equation)** ของเส้นตรง L จากสมการ (3.2) เราจะแยกเขียนสมการสำหรับส่วนประกอบได้เป็น

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

หรือ

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct \quad (3.3)$$

เรียกสมการ (3.3) ว่า **สมการอ้างอิงตัวแปรเสริม (parametric equation)** ของเส้นตรง L ถ้า a, b, c ไม่มีจำนวนใดเป็นศูนย์ จะได้ว่า

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (3.4)$$

เรียกสมการ (3.4) ว่า **สมการสมมาตร (symmetric equation)** ของเส้นตรง L

ตัวอย่าง 3.3.2 จงหาสมการเวกเตอร์ สมการอิงตัวแปรเสริม และสมการสมมาตร ของเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_0(1, 2, 3)$ และขนานกับ $\vec{A} = \langle 1, 2, -1 \rangle$

ตัวอย่าง 3.3.3 จงหาสมการเวกเตอร์ สมการอิงตัวแปรเสริม และสมการสมมาตร ของเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(1, 3, 4)$ และ $P_2(1, -2, 3)$

ตัวอย่าง 3.3.4 จงตรวจสอบว่าจุด $P(1, -2, 3)$ อยู่บนเส้นตรงต่อไปนี้หรือไม่

1. $L_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y+5}{3} = z-2$

2. $L_2: x = 3-t, \quad y = 2-4t, \quad z = 3+t$

ตัวอย่าง 3.3.5 จุด $A(1, 2, 0)$, $B(-1, 3, 4)$ และ $C(-1, 1, -4)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่

ตัวอย่าง 3.3.6 จงหาจุดที่เส้นตรงต่อไปนี้ตัดระนาบ XY ระนาบ XZ และ ระนาบ YZ

1. $x = 1 + t, \quad y = 2 - 2t, \quad z = t - 3$

2. $\frac{3-x}{3} = \frac{y-10}{5}, \quad z = 4$

การขนานกันของเส้นตรง

บทนิยาม 3.3.7 เส้นตรงสองเส้นขนานกัน (parallel line) ก็ต่อเมื่อเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรงทั้งสองเส้นขนานกัน

ตัวอย่าง 3.3.8 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1, 2, 3)$ และขนานกับเส้นตรง

$$L : x + 2 = \frac{4-y}{2} = 1 - z$$

การตัดกันของเส้นตรง

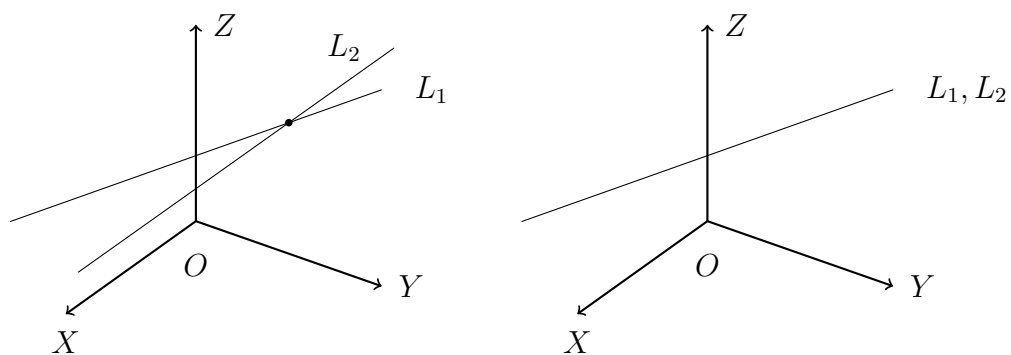
ความสัมพันธ์ของเส้นตรง L_1 และ L_2 ในปริภูมิสามมิตีมีลักษณะดังนี้

1. เกิดจุดตัด

1.1 เกิดตัดกันเพียงจุดเดียว

1.2 เกิดตัดกันมากกว่าจุดเดียว

รูปที่ 3.13: ลักษณะของเส้นตรง L_1 และ L_2 ที่ตัดกัน

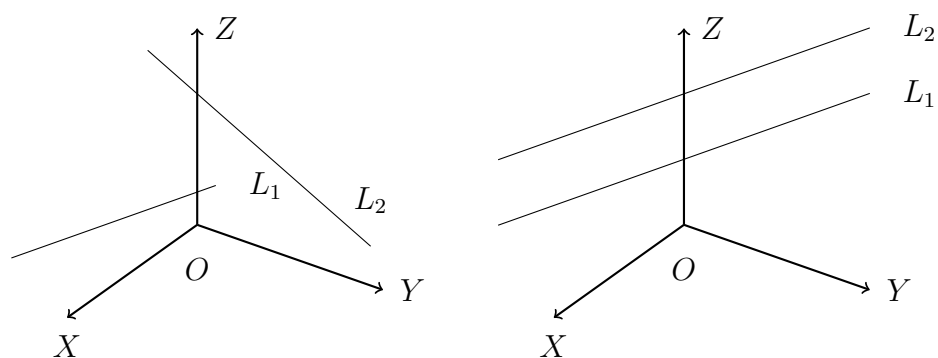


2. ไม่เกิดจุดตัด

2.1 ไม่เกิดจุดตัดกัน และเส้นตรงไม่ขนานกัน

2.2 ไม่เกิดจุดตัด แต่เส้นตรงขนานกัน

รูปที่ 3.14: ลักษณะของเส้นตรง L_1 และ L_2 ที่ไม่ตัดกัน



ตัวอย่าง 3.3.9 จงตรวจสอบว่า L_1 และ L_2 ตัดกันหรือไม่ ถ้าตัดกันจงหาจุดตัด

$$L_1 \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 - 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad L_2 \begin{cases} x = 1 - s \\ y = 9 + 3s \\ z = 2 + s \end{cases}$$

ตัวอย่าง 3.3.10 จงตรวจสอบว่า L_1 และ L_2 ตัดกันหรือไม่ ถ้าตัดกันจงหาจุดตัด

$$L_1 : 2 - x = 3 - y = \frac{z-1}{2} \quad \text{และ} \quad L_2 : \frac{7-x}{3} = y = z - 1$$

การไขว้ต่างระนาบของเส้นตรง

บทนิยาม 3.3.11 เราจะเรียกเส้นตรงสองเส้นว่า **เส้นไขว้ต่างระนาบ (skew line)** ก็ต่อเมื่อเราไม่สามารถหาระนาบที่เส้นตรงทั้งสองอยู่บนระนาบเดียวกันได้ หรือกล่าวได้อีกอย่างว่าเส้นตรงทั้งสองไม่ตัดกันและไม่ขนานกัน

ตัวอย่าง 3.3.12 จงพิจารณา L_1 และ L_2 ว่าเป็นเส้นไขว้ต่างระนาบกันหรือไม่

$$L_1 \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ 3z = 2 + t \end{cases} \quad L_2 \begin{cases} x = 2 - 2s \\ y = 1 + 4s \\ z = 1 - 2s \end{cases}$$

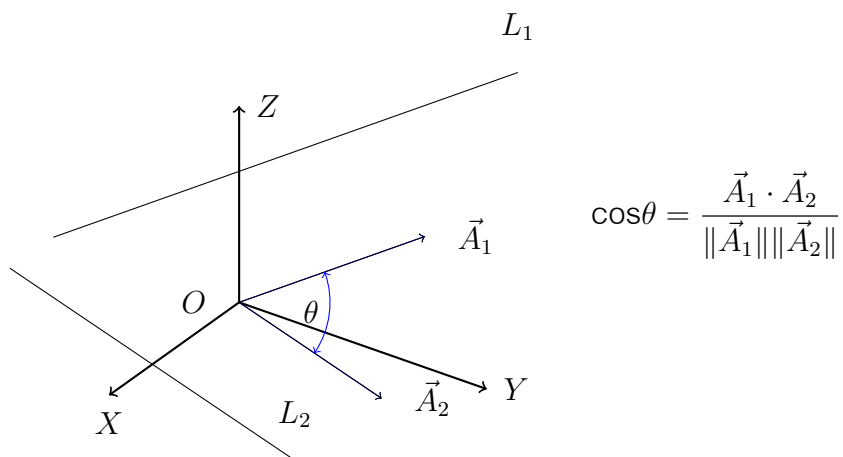
ตัวอย่าง 3.3.13 จงพิจารณา L_1 และ L_2 ว่าเป็นเส้นไขว้ต่างระนาบกันหรือไม่

$$L_1 : x = \frac{y}{2} = z - 1 \quad \text{และ} \quad L_2 : \frac{x+1}{2} = y - 1 = \frac{z+2}{3}$$

มุมระหว่างเส้นตรง

บทนิยาม 3.3.14 มุมระหว่างเส้นตรงสองเส้น คือมุมระหว่างเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรงทั้งสองเส้นนั้น

รูปที่ 3.15: มุมระหว่างเส้นตรงสองเส้น



ตัวอย่าง 3.3.15 จงหามุมระหว่างเส้นตรง L_1 และ L_2

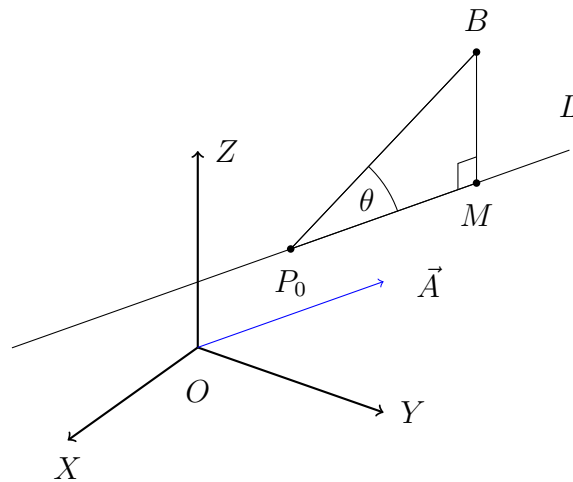
1. $L_1 : x = 2 + t, \quad y = 1 + 2t, \quad 2z = 1 + 4t$
 $L_2 : x = -3s, \quad y = 2 + 4s, \quad z = 5s - 1$

2. $L_1 : 2x - 1 = y = \frac{1 - z}{3}$ และ $L_2 : \frac{x}{4} = y - 1 = z$

ระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง

การวัดระยะทางระหว่างจุด B กับเส้นตรง L คือความยาวที่สั้นที่สุดจากจุด B ไปยังเส้นตรง L หมายถึงความยาวของเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุด B ไปยังเส้นตรง L ที่จุด M เรียกจุด M ว่า **จุดเชิงเส้นตั้งฉาก** (Orthogonal point)

รูปที่ 3.16: จุดเชิงเส้นตั้งฉากจาก B ไปยังเส้นตรง L



จากรูป 3.16 จะได้ว่า $\|\vec{BM}\| = \|\vec{P_0B}\| \sin \theta$ เนื่องจาก $\vec{A}$ ขนานกับ $\vec{P_0M}$ ดังนั้น θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{PB}$ กับ $\vec{A}$ ดังนั้น

$$\|\vec{BM}\| = \frac{\|\vec{P_0B}\| \|\vec{A}\| \sin \theta}{\|\vec{A}\|} = \frac{\|\vec{P_0B} \times \vec{A}\|}{\|\vec{A}\|}$$

จากรูป 3.16 เห็นได้ชัดว่า $\vec{P_0M}$ คือภาพฉายเวกเตอร์ของ $\vec{P_0B}$ บน $\vec{A}$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned} \vec{P_0M} &= \left(\frac{\vec{P_0B} \cdot \vec{A}}{\|\vec{A}\|^2} \right) \vec{A} \\ \vec{M} - \vec{P_0} &= \left(\frac{\vec{P_0B} \cdot \vec{A}}{\|\vec{A}\|^2} \right) \vec{A} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\vec{M} = \vec{P_0} + \left(\frac{\vec{P_0B} \cdot \vec{A}}{\|\vec{A}\|^2} \right) \vec{A}$$

ตัวอย่าง 3.3.16 จงหาจุดเชิงเส้นตั้งฉากของจุด $B(2, 1, -1)$ บนเส้นตรง

$$L : x = 5 + 4t, y = 2 - t, z = 4 + 3t$$

พร้อมทั้งหาระยะทางจากจุด B ไปยังเส้นตรงนี้

ตัวอย่าง 3.3.17 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $B(1, -1, 2)$ ซึ่งตัดและตั้งฉากกับเส้นตรง

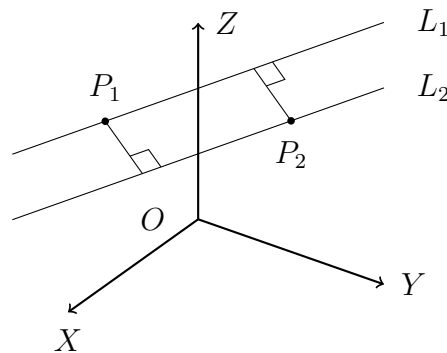
$$L : x - 1 = \frac{3 - y}{2} = -z$$

ระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้น

บทนิยาม 3.3.18 ระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้น คือระยะที่สั้นที่สุดระหว่างเส้นตรงทั้งสอง

1. ระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกัน

รูปที่ 3.17: ระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกัน



ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกัน ซึ่งผ่านจุด P_1 และ P_2 ตามลำดับ ระยะทางระหว่าง L_1 และ L_2 คือ ระยะทางระหว่างจุด P_1 ไปยัง L_2 หรือ P_2 ไปยัง L_1 นั่นคือ

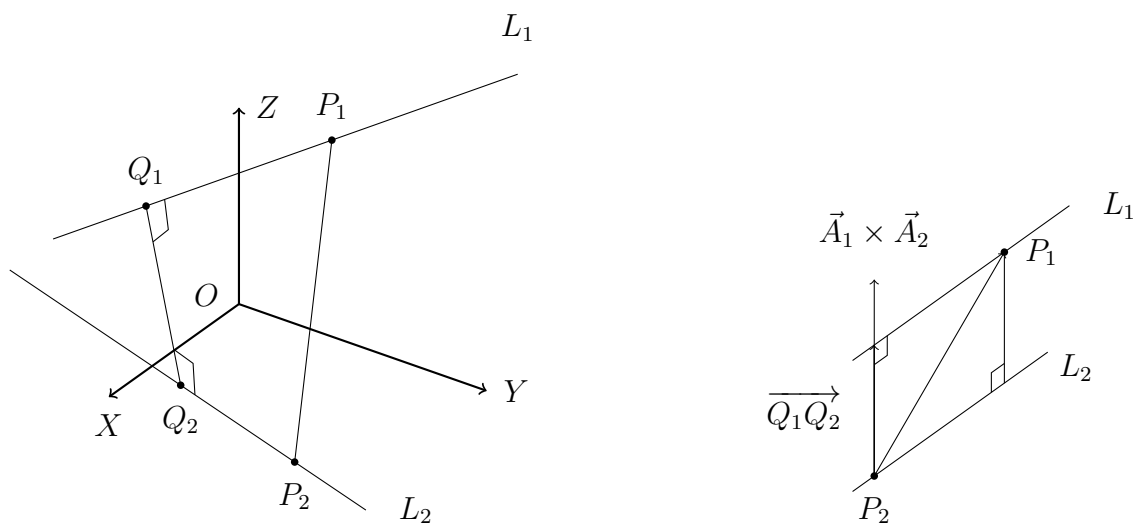
$$\text{ระยะทางระหว่าง } L_1 \text{ และ } L_2 \text{ เท่ากับ } \frac{\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{A}_1\|}{\|\vec{A}_1\|} \quad \text{หรือ} \quad \frac{\|\overrightarrow{P_2P_1} \times \vec{A}_2\|}{\|\vec{A}_2\|}$$

ตัวอย่าง 3.3.19 จงหาระยะทางระหว่างเส้นตรง

$$L_1 : x = 1 + t, y = 2 - 2t, z = -1 + 2t \quad \text{และ} \quad L_2 : x = 2 - s, y = 1 + 2s, z = -2s$$

2. ระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานกัน

รูปที่ 3.18: ระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานกัน



จากรูป Q_1 และ Q_2 เป็นจุดปลายของส่วนเส้นตรงที่ตั้งฉากกับ L_1 และ L_2 ดังนั้น

ระยะทางระหว่าง L_1 และ L_2 เท่ากับ $\|\overrightarrow{Q_1Q_2}\|$

เนื่องจาก $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ ตั้งฉากกับ $\vec{A}_1$ และ $\vec{A}_2$ จะได้ว่า $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ ขนานกับ $\vec{A}_1 \times \vec{A}_2$ จากรูปจะได้ว่า

$$\|\overrightarrow{Q_1Q_2}\| = \text{ขนาดของภาพฉายสเกลาร์ของ } \overrightarrow{P_2P_1} \text{ บน } \vec{A}_1 \times \vec{A}_2$$

ดังนั้น

$$\text{ระยะทางระหว่าง } L_1 \text{ และ } L_2 \text{ เท่ากับ } \frac{|\overrightarrow{P_2P_1} \cdot (\vec{A}_1 \times \vec{A}_2)|}{\|\vec{A}_1 \times \vec{A}_2\|}$$

ตัวอย่าง 3.3.20 จงหาระยะทางระหว่างเส้นตรง

$$L_1 : \frac{x-1}{2} = -y = -\frac{z}{2} \quad \text{และ} \quad L_2 : x = -3t, y = 1 + 2t, z = t$$

แบบฝึกหัด 3.3

- จงหาสมการเวกเตอร์ สมการอิงตัวแปรเสริม และสมการสมมาตร ของเส้นตรงที่ผ่านจุด P_0 และขนานกับ $\vec{A}$
 - $P_0(2, 1, 1)$ และ $\vec{A} = \langle 1, -1, 3 \rangle$
 - $P_0(-1, 3, 5)$ และ $\vec{A} = \langle 0, 2, -1 \rangle$
- จงหาสมการของเส้นตรงที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้
 - ผ่านจุด $(1, -1, 0)$ และ $(2, -3, 5)$
 - ผ่านจุด $(-1, -3, -2)$ และขนานกับ $\langle -5, 0, 1 \rangle$
 - ผ่านจุด $(1, 2, -2)$ และขนานกับเส้นตรง $x = y = z$
- จงตรวจสอบว่าจุด $(1, 2, -3)$ อยู่บนเส้นตรงใดต่อไปนี้หรือไม่
 - $x = 3 - 2t, y = 3 + t, z = 1 - 4t$
 - $2x = 3 + 2t, y = 1 - 2t, 3z = 4t - 7$
 - $2x - 1 = \frac{y + 2}{2} = \frac{z}{3}$
 - $\frac{x + 7}{4} = 4 - y = \frac{z + 9}{3}$
- จงพิจารณาว่าจุด $A(3, 3, 1), B(-1, 5, -7)$ และ $C(5, 2, 5)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่
- จงหาระยะทางจากจุด $B(1, -2, 1)$ ไปยังเส้นตรงต่อไปนี้ และจุดเชิงตั้งฉาก
 - $x = 6 + 4t, y = 3 - 2t, z = 1 + t$
 - $\frac{x - 1}{2} = \frac{1 - y}{3} = \frac{z + 1}{4}$
- จงหาพิกัดของจุดบนเส้นตรงต่อไปนี้ ที่อยู่ใกล้จุดกำเนิดมากที่สุด
 - $x = 9 + 4t, y = t, z = 3 + 2t$
 - $\frac{8 - x}{6} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z + 7}{8}$
- จงตรวจสอบว่า L_1 และ L_2 ตัดกันหรือไม่ ถ้าตัดจงหาจุดตัด
 - $$L_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 3t \\ 3z = 2 - 3t \end{cases} \quad L_2: \begin{cases} x = 4 + s \\ y = 5 + 3s \\ z = 0 + s \end{cases}$$
 - $L_1: \frac{x - 1}{2} = 2 - y = z$ และ $L_2: \frac{2x + 1}{3} = y = z - 2$
- จงหามุมระหว่างเส้นตรง L_1 และ L_2 ในแต่ละข้อต่อไปนี้

$$8.1 \quad L_1 \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ 3z = 5 + t \end{cases} \quad L_2 \begin{cases} x = 2 + s \\ y = 5 - 2s \\ z = 1 - s \end{cases}$$

$$8.2 \quad L_1 : 1 - x = y = \frac{z+3}{\sqrt{2}} \text{ และ } L_2 : \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{y-3}{\sqrt{2}} = \frac{z+1}{2}$$

9. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด ซึ่งตัดและตั้งฉากกับเส้นตรง $x = \frac{3-y}{2} = z-2$

10. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1, 2, 1)$ และขนานกับเส้นตรง $\frac{x+3}{2} = \frac{1-y}{5} = 2-z$

11. จงพิจารณา L_1 และ L_2 ว่าเป็นเส้นไขว้ต่างระนาบกันหรือไม่

$$11.1 \quad L_1 \begin{cases} 2x = 1 + 4t \\ y = 2 - t \\ z = 0 + t \end{cases} \quad L_2 \begin{cases} x = 0 - 4s \\ y = 1 + 2s \\ 3z = 1 - 6s \end{cases}$$

$$11.2 \quad L_1 : x - 1 = \frac{3-y}{2} = 2z + 1 \text{ และ } L_2 : 2 - x = \frac{y-1}{2} = \frac{1-4z}{2}$$

12. จงระยะทางระหว่าง L_1 และ L_2 ในแต่ละข้อต่อไปนี้

$$12.1 \quad L_1 \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + t \\ z = 5 - t \end{cases} \quad L_2 \begin{cases} x = 4 - 3s \\ y = -3 - s \\ z = 1 + s \end{cases}$$

$$12.2 \quad L_1 \begin{cases} x = 0 + 7t \\ y = 2 + t \\ 3z = 4 - 3t \end{cases} \quad L_2 \begin{cases} x = 3 - s \\ y = 5 \\ z = 6 + 2s \end{cases}$$

$$12.3 \quad L_1 : x + 5 = \frac{y+3}{4} = \frac{6-z}{9} \text{ และ } L_2 : 2 - x = \frac{4-y}{4} = \frac{z+1}{-9}$$

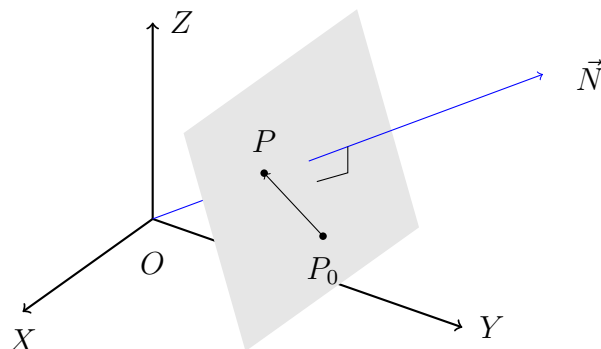
$$12.4 \quad L_1 \begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = 2 - t \\ 3z = 4 + 3t \end{cases} \quad L_2 \begin{cases} x = 2 - 8s \\ y = 1 + 2s \\ z = -1 - 6s \end{cases}$$

$$12.5 \quad L_1 : x + 1 = \frac{z+1}{2}, y = 2 \text{ และ } L_2 : x = 2 - t, y = 3 + 4t, z = 2t$$

3.4 ระนาบในปริภูมิสามมิติ

บทนิยาม 3.4.1 ให้ P_0 เป็นจุดใน $\mathbb{R}^3$ และ $\vec{N} \neq \vec{0}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ เรียกเซตของจุด P ใด ๆ ซึ่งทำให้ $\overrightarrow{P_0P}$ ตั้งฉากกับ $\vec{N}$ ว่า **ระนาบ (plane)** ที่ผ่านจุด P_0 และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{N}$ และเรียก $\vec{N}$ ว่า **เวกเตอร์แนวฉาก (normal vector)**

รูปที่ 3.19: ระนาบในปริภูมิสามมิติ



เนื่องจาก $\overrightarrow{P_0P}$ ตั้งฉากกับ $\vec{N}$ ดังนั้น $\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{N} = 0$ หรือ

$$(\vec{P} - \vec{P}_0) \cdot \vec{N} = 0 \quad (3.5)$$

เราจะเรียกสมการ (3.5) ว่า **สมการเวกเตอร์ของระนาบ (vector equation of the plane)**

ถ้ากำหนดให้ $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P = (x, y, z)$ และ $\vec{N} = \langle a, b, c \rangle$ จะได้ว่า

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad (3.6)$$

เรียกสมการ (3.6) ว่า **สมการสเกลาร์ (scalar equation)** ของระนาบที่ผ่านจุด (x_0, y_0, z_0) และมี $\langle a, b, c \rangle$ เป็นเวกเตอร์แนวฉาก

ถ้าเราจัดรูปสมการ (3.6) โดยกำหนดให้ $d = ax_0 + by_0 + cz_0$ จะได้ว่า

$$ax + by + cz = d \quad (3.7)$$

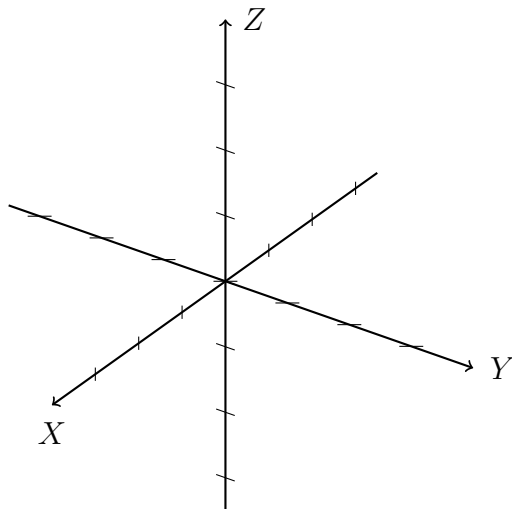
เรียกสมการ (3.7) ว่า **สมการคาร์ทีเซียน (cartesian equation)** ของระนาบ ที่มี $\langle a, b, c \rangle$ เป็นเวกเตอร์แนวฉาก

ตัวอย่าง 3.4.2 จงหาสมการเวกเตอร์ สมการสเกลาร์ และสมการคาร์ทีเซียนของระนาบที่ผ่านจุด $P_0(1, 2, 3)$ และตั้งฉากกับ $\vec{N} = \langle 1, -1, 4 \rangle$

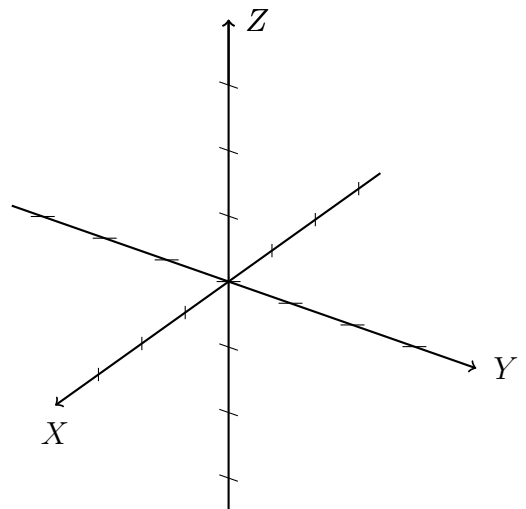
ตัวอย่าง 3.4.3 จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุด $P(1, 2, 3)$, $Q(3, -1, 6)$ และ $R(5, 1, 0)$

ตัวอย่าง 3.4.4 จงร่างกราฟของระนาบต่อไปนี้

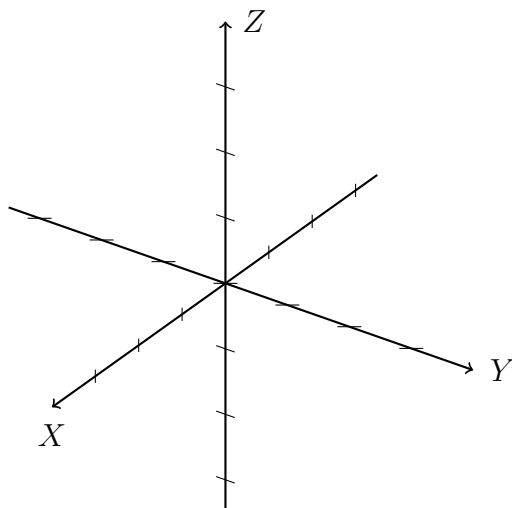
1. $x = 2$



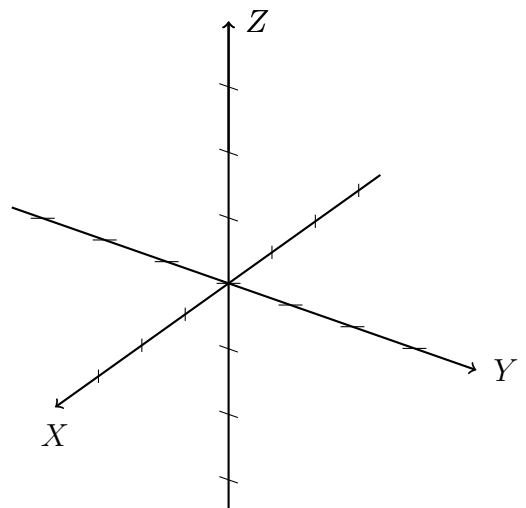
3. $z = 3$



2. $y = 1$



4. $x + y + z = 2$



ตัวอย่าง 3.4.5 จงตรวจสอบว่า $P(1, 2, -1)$ และ $Q(2, 3, 1)$ อยู่บนระนาบ $x - 2y - 4z = 1$ หรือไม่

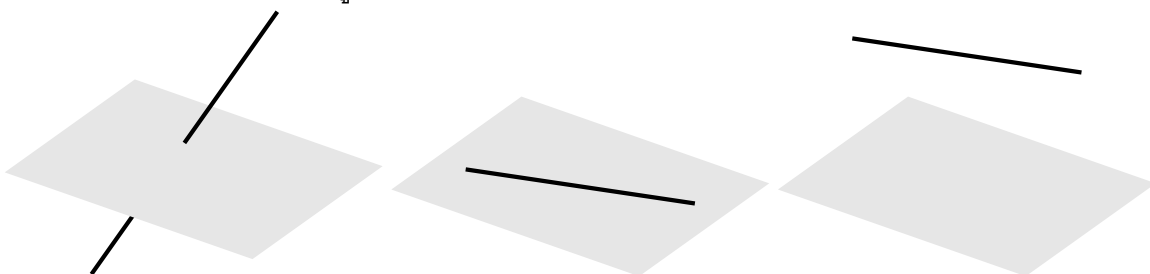
ตัวอย่าง 3.4.6 จงตรวจสอบว่า $P(1, 2, -1)$, $Q(2, 0, 3)$, $R(3, 4, 1)$ และ $S(-2, 1, 2)$ อยู่บนระนาบเดียวกันหรือไม่

เส้นตรงกับระนาบ

เส้นตรงกับระนาบมีความสัมพันธ์กัน 3 ลักษณะคือ

1. เส้นตรงกับระนาบมีจุดร่วมกันจุดเดียว เรียกว่าเส้นตรงตัดกับระนาบ
2. เส้นตรงกับระนาบมีจุดร่วมกันมากกว่าหนึ่งจุด เรียกว่าเส้นตรงอยู่บนระนาบ
3. เส้นตรงกับระนาบมีไม่มีจุดร่วม เรียกว่าเส้นตรงขนานกับระนาบ

รูปที่ 3.20: ลักษณะเส้นตรงกับระนาบ



ข้อสังเกต ถ้า $\vec{A} \cdot \vec{N} = 0$ แล้วจะได้ว่า เส้นตรงขนานกับระนาบ หรือ เส้นตรงอยู่บนระนาบ
 ถ้า $\vec{A} \cdot \vec{N} \neq 0$ แล้วจะได้ว่า เส้นตรงตัดกับระนาบ

ตัวอย่าง 3.4.7 จงพิจารณาว่าเส้นตรงกับระนาบต่อไปนี้ตัดกันหรือขนานกัน ถ้าตัดกันจงหาจุดตัด ถ้าขนานกันจงพิจารณาว่าเส้นตรงอยู่บนระนาบหรือไม่

1. $L : x = 1 + 2t, y = 2 + t, z = 3 - 3t$ และ $M : x + 4y + 2z = 5$

2. $L : x - 1 = \frac{y + 3}{2} = z$ และ $M : 2x - y + z = 7$

ตัวอย่าง 3.4.8 จงหาสมการของระนาบที่ผ่านเส้นตรง $L : x = y - 1 = \frac{z}{2}$ และผ่านจุด $Q(1, 3, -1)$

ตัวอย่าง 3.4.9 จงหาสมการของระนาบที่ขนานกับเส้นตรง

$$L_1 : x - 1 = \frac{y}{2} = z \text{ และ } L_2 : \frac{x}{2} = y = \frac{z}{3}$$

และผ่านจุด $Q(2, -3, 1)$

ตัวอย่าง 3.4.10 จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุด $Q(3, -6, 3)$ และตั้งฉากกับเส้นตรง

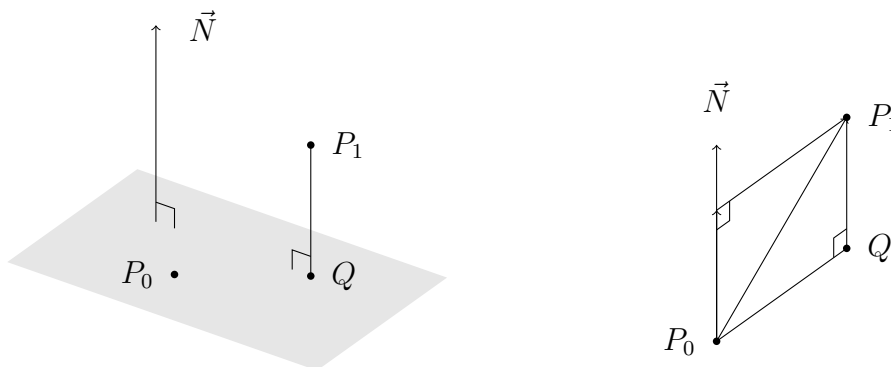
$$\vec{P} = \langle 2, 0, 1 \rangle + t\langle 3, -1, 1 \rangle$$

ระยะทางระหว่างจุดกับระนาบ

บทนิยาม 3.4.11 ระยะทางระหว่างจุดกับระนาบ คือระยะทางตั้งฉากจากจุดนั้นไปยังระนาบ

ให้ระนาบ M มีสมการเวกเตอร์เป็น $(\vec{P} - \vec{P}_0) \cdot \vec{N} = 0$ และ P_1 เป็นจุดใน $\mathbb{R}^3$ ลากไปตั้งฉากกับระนาบ M ที่จุด Q ดังรูป

รูปที่ 3.21: ระยะทางระหว่างจุดกับระนาบ



จากรูปที่ 3.21 จะได้ว่า $\|\overrightarrow{QP_1}\|$ = ขนาดของภาพฉายของ $\overrightarrow{P_0P_1}$ บน $\vec{N}$ จะได้ว่า

$$\|\overrightarrow{QP_1}\| = \frac{|\overrightarrow{P_0P_1} \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|} = \frac{|(\vec{P}_1 - \vec{P}_0) \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|}$$

กำหนดให้ระนาบ M ผ่านจุด $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ และมี $\vec{N} = \langle a, b, c \rangle$ เป็นเวกเตอร์แนวฉาก M จะมีสมการคาร์ทีเซียนเป็น $ax + by + cz = d$ เมื่อ $d = ax_0 + by_0 + cz_0$ แล้ว

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{QP_1}\| &= \frac{|(\vec{P}_1 - \vec{P}_0) \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|} = \frac{|\langle x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0 \rangle \cdot \langle a, b, c \rangle|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - (ax_0 + by_0 + cz_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{aligned}$$

ดังนั้นระยะทางระหว่างจุด $P_1(x_1, y_1, z_1)$ กับระนาบ $ax + by + cz = d$ คือ

$$\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

ตัวอย่าง 3.4.12 จงหาระยะทางระหว่างจุด $P_1(4, 3, -1)$ กับระนาบ $x - 2y + 2z = 5$

ตัวอย่าง 3.4.13 จงระยะทางระหว่างเส้นตรง $\frac{x-1}{2} = y = \frac{z+2}{3}$ กับระนาบ $x + y - z = 9$

ตัวอย่าง 3.4.14 จงหาจุดบนระนาบ $2x + y - 3z + 10 = 0$ ซึ่งอยู่ใกล้ที่สุดกับจุด $P(4, 2, 2)$

มุมระหว่างเส้นตรงกับระนาบ

บทนิยาม 3.4.15 ถ้าเวกเตอร์แสดงทิศทาง $\vec{A}$ ของ L ทำมุม θ กับเวกเตอร์แนวฉาก

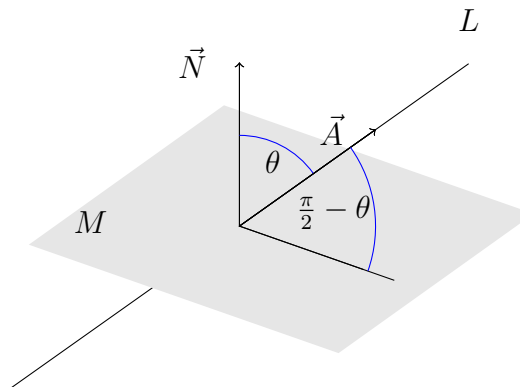
$$\left| \frac{\pi}{2} - \theta \right| \text{ เรเดียน} \quad \text{หรือ} \quad |90 - \theta| \text{ องศา}$$

และจะเห็นว่า

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{N}}{\|\vec{A}\| \|\vec{N}\|}$$

แสดงดังรูปต่อไปนี้

รูปที่ 3.22: มุมระหว่างเส้นตรง L กับระนาบ M

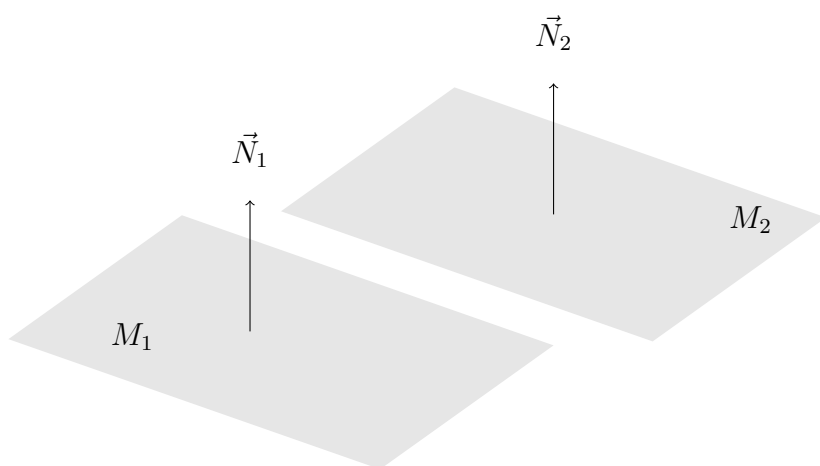


ตัวอย่าง 3.4.16 จงหามุมระหว่างเส้นตรง $L : \frac{x}{5} = \frac{1-y}{2} = \frac{z}{5}$ กับระนาบ $M : 2x + y - 7z = 1$

การขนานกันของระนาบและระยะทางระหว่างระนาบทั้งสอง

ระนาบขนานกัน ก็ต่อเมื่อเวกเตอร์แนวฉากของระนาบทั้งสองขนานกัน

รูปที่ 3.23: การขนานกันของระนาบ



ตัวอย่าง 3.4.17 จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด $(1, 2, -3)$ และขนานกับระนาบ $x + 2y - z = 5$

บทนิยาม 3.4.18 ระยะทางระหว่างระนาบทั้งสองคือระยะฉากระหว่างระนาบทั้งสอง

ให้ M_1 และ M_2 เป็นระนาบที่ขนานกันมีสมการดังนี้ $ax + by + cz = d_1$ และ $ax + by + cz = d_2$ ตามลำดับ ให้ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ เป็นจุดบนระนาบ M_1 ดังนั้น

$$\begin{aligned} \text{ระยะทางระหว่างระนาบ } M_1 \text{ และ } M_2 &= \text{ระยะทางระหว่างจุด } P_1 \text{ กับระนาบ } M_2 \\ &= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{aligned}$$

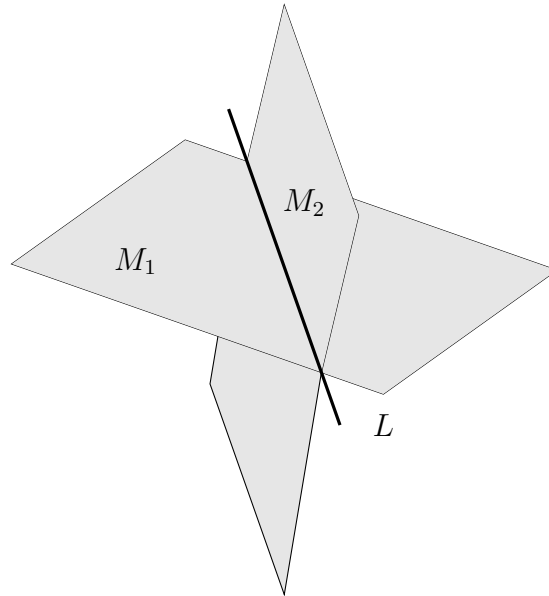
ตัวอย่าง 3.4.19 จงหาระยะทางระหว่างระนาบ $x + 2y - 2z = 10$ และ $x + 2y - 2z = 1$

ตัวอย่าง 3.4.20 จงหาสมการระนาบที่ขนานกับระนาบ $x + y - \sqrt{2}z = 1$ และระยะทางระหว่างระนาบทั้งสองเท่ากับ 5 หน่วย

การตัดกันของระนาบ

ระนาบที่ตัดกันคือระนาบที่ไม่ขนานกัน (พิจารณาจากเวกเตอร์แนวฉากของระนาบทั้งสองขนานกันหรือไม่) รอยตัดที่เกิดขึ้นย่อมเป็นเส้นตรง

รูปที่ 3.24: รอยตัดของระนาบทั้งสอง



จากรูปเนื่องจากเส้นตรง L อยู่บนระนาบ M_1 และ M_2 ดังนั้นเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรง L ต้องตั้งฉากกับ $\vec{N}_1$ และ $\vec{N}_2$ ดังนั้น $\vec{A} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$ และจุดผ่าน L คือจุดที่อยู่บน M_1 และ M_2

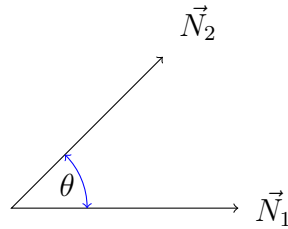
ตัวอย่าง 3.4.21 จงหาสมการเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ

$$2x - y + z = 1 \quad \text{และ} \quad x + y - 2z = 5$$

มุมระหว่างระนาบ

บทนิยาม 3.4.22 มุมระหว่างระนาบสองระนาบคือมุมระหว่างเวกเตอร์แนวฉากของระนาบทั้งสอง

รูปที่ 3.25: มุมระหว่างเวกเตอร์แนวฉาก $\vec{N}_1$ และ $\vec{N}_2$



ตัวอย่าง 3.4.23 จงหามุมระหว่างระนาบ $2x + y + 2z = 1$ กับ $5x - 3y + 4z = 5$

แบบฝึกหัด 3.4

1. จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุด P_0 และมี $\vec{N}$ เป็นเวกเตอร์แนวฉาก
 - 1.1 $P_0(2, 1, 1)$ และ $\vec{N} = \langle 2, -1, 5 \rangle$
 - 1.2 $P_0(-1, 0, 5)$ และ $\vec{N} = \langle 3, 2, 1 \rangle$
 - 1.3 $P_0(1, 3, -3)$ และ $\vec{N} = \langle 0, 3, -2 \rangle$
 - 1.4 $P_0(2, 6, -4)$ และ $\vec{N} = \langle -1, -3, 1 \rangle$
2. จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุดทั้ง 3 จุด
 - 2.1 $(1, -1, 0)$, $(0, -1, 2)$ และ $(-1, -3, 5)$
 - 2.2 $(-1, -3, -2)$, $(2, 5, 0)$ และ $(1, -2, 1)$
3. จงเขียนกราฟของระนาบต่อไปนี้

3.1 $x = z$	3.4 $2x - y + z = 5$
3.2 $3x + y = 2$	3.5 $5x + 2y - 3z = 15$
3.3 $x - y + z = 2$	3.6 $3x + 3y + 2z = 6$
4. จงพิจารณาว่าจุดทั้ง 4 จุดอยู่บนระนาบเดียวกันหรือไม่
 - 4.1 $(1, 1, 1)$, $(-2, 4, 1)$, $(3, 1, 2)$ และ $(5, 1, 3)$
 - 4.2 $(1, 2, 7)$, $(-1, 1, 2)$, $(2, 0, 7)$ และ $(1, 1, 2)$
5. จงหาระยะทางระหว่างจุดกับระนาบที่กำหนดให้ต่อไปนี้
 - 5.1 $(1, -2, 3)$ กับ $3x + 2y - z = 12$
 - 5.2 $(-1, 1, -2)$ กับ $3x + 4y - 5z = 15$
6. จงหาจุดบนระนาบ $x - 2y + 3z = 4$ ซึ่งอยู่ใกล้ที่สุดกับจุด $(2, 3, -2)$
7. พิจารณาเส้นตรง L กับระนาบ M ที่กำหนดให้ตัดกันหรือขนานกัน ถ้าตัดกันจงหาจุดตัดและมุมระหว่างเส้นตรงกับระนาบ ถ้าขนานกันจงพิจารณาว่าเส้นตรงอยู่บนระนาบหรือไม่ และหาระยะทางระหว่างเส้นตรงกับระนาบ
 - 7.1 $L : \frac{x}{6} = y = \frac{1-z}{2}$ และ $M : x - 2y + 2z = 4$
 - 7.2 $L : \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = z$ และ $M : 5x + 4y - 3z = 15$
 - 7.3 $L : x = 3 + t, y = -1 + 3t, z = 1 + 2t$ และ $M : 2x - y + 3z = 5$
 - 7.4 $L : 1 - x = \frac{y}{2} = z - 2$ และ $M : 3x + y + z = 3$
8. จงหาสมการระนาบที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

8.1 ผ่านจุด $(1, 0, 2)$ และเส้นตรง $\frac{x}{3} = y + 1 = \frac{2 - z}{2}$

8.2 ผ่านเส้นตรง $\frac{x - 2}{2} = y + 1 = -z$ และ $\frac{1 - x}{2} = -y = z + 1$

8.3 ผ่านจุด $(2, 1, -3)$ และขนานกับเส้นตรง $\frac{x}{2} = y = \frac{z}{3}$ และ $x - 1 = y + 1 = \frac{z}{2}$

8.4 ผ่านเส้นตรง $x = 3 + 2t, y = -t, z = 2t$ และ $x - 2 = \frac{-1 - y}{2} = -3 - z$

8.5 ผ่านจุด $(2, -1, 0)$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = z$

8.6 ผ่านจุด $(1, 2, 3)$ และ $(2, 0, 2)$ และขนานกับเส้นตรง $x = y - 1 = \frac{z}{2}$

9. จงหาสมการเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ M_1 และ M_2

9.1 $M_1 : x + y + z = 2$

9.2 $M_1 : x + y + 3z = 5$

$M_2 : 2x - y + z = 3$

$M_2 : x - 5y + z = 1$

10. จงหามุมระหว่างระนาบ M_1 และ M_2

10.1 $M_1 : 2x - 5y + 5z = 2$

10.2 $M_1 : x + y + z = 3$

$M_2 : 1x - 2y + 7z = 1$

$M_2 : x - y - z = 4$

11. จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด $(1, 2, 3)$, $(2, 0, 1)$ และตั้งฉากกับระนาบ $x + y - z = 1$

12. จงหาสมการระนาบที่ขนานกับระนาบ $x + 2y - 2z = 10$ และระยะทางระหว่างระนาบทั้งสองเท่ากับ 3 หน่วย

13. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิดและอยู่บนระนาบ $x + y = 3z$

3.5 ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

บทนิยาม 3.5.1 ให้ $n \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $n \geq 2$ และ $x_1, x_2, \dots, x_n$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงบนช่วง I แล้ว

$$\vec{F}(t) = \langle x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t) \rangle$$

เรียกว่าฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ (vector value function) จาก I ไป $\mathbb{R}^n$

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ในกรณี $n = 2, 3$ นั่นคือ

$$\vec{F}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle \quad \text{หรือ} \quad \vec{F}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$$

ตัวอย่าง 3.5.2 ให้ $\vec{F}(t) = \langle t, t^2 \rangle$ เมื่อ $0 \leq t \leq 2$ จงหา

1. $\vec{F}(1)$
2. $\vec{F}(2)$

บทนิยาม 3.5.3 ให้ $\vec{F}$ และ $\vec{G}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์จาก I ไป $\mathbb{R}^3$ และ u เป็นฟังก์ชันจาก I ไป $\mathbb{R}$ และ $t \in I$ แล้ว

1. $(\vec{F} + \vec{G})(t) = \vec{F}(t) + \vec{G}(t)$
2. $(u\vec{G})(t) = u(t)\vec{G}(t)$
3. $(\vec{F} \cdot \vec{G})(t) = \vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t)$
4. $(\vec{F} \times \vec{G})(t) = \vec{F}(t) \times \vec{G}(t)$

ตัวอย่าง 3.5.4 ให้ $\vec{F}(t) = \langle 1, t, t^2 \rangle$ และ $\vec{G}(t) = \langle 1 + t, 2t, 1 - t \rangle$ เมื่อ $0 \leq t \leq 2$ จงหา

1. $(\vec{F} + \vec{G})(1)$

2. $(\vec{F} \cdot \vec{G})(1)$

3. $(\vec{F} \times \vec{G})(1)$

ลิมิตของฟังก์ชันเวกเตอร์

บทนิยาม 3.5.5 ให้ $\vec{F}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ ลิมิตของ $\vec{F}(t)$ เมื่อ t เข้าใกล้ t_0 เขียนแทนด้วย $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t)$ แล้ว

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) \text{ มีค่า ก็ต่อเมื่อ } \lim_{t \rightarrow t_0} x(t), \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) \text{ และ } \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) \text{ มีค่า}$$

$$\text{และจะได้ว่า } \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) = \left\langle \lim_{t \rightarrow t_0} x(t), \lim_{t \rightarrow t_0} y(t), \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) \right\rangle$$

ตัวอย่าง 3.5.6 จงหาค่าของ $\lim_{t \rightarrow 1} \langle t^2 + 1, \cos \pi t, t^2 - 1 \rangle$

บทนิยาม 3.5.7 กำหนดให้ $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

$$\vec{F} \text{ มีความต่อเนื่องที่ } t = t_0 \text{ ก็ต่อเมื่อ } \vec{F}(t_0) \text{ และ } \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) \text{ มีค่า และ } \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) = \vec{F}(t_0)$$

ถ้า $\vec{F}$ ต่อเนื่องทุกจุดบนช่วง I แล้วจะกล่าวว่า $\vec{F}$ มีความต่อเนื่องบนช่วง I

อนุพันธ์ของฟังก์ชันเวกเตอร์

บทนิยาม 3.5.8 กำหนดให้ $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์และต่อเนื่องบนช่วง I และ $t_0 \in I$ ถ้า

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(t_0 + h) - \vec{F}(t_0)}{h} \text{ มีค่า}$$

จะเขียนแทนด้วย

$$\frac{d}{dt} \vec{F}(t)|_{t=t_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(t_0 + h) - \vec{F}(t_0)}{h} \quad \text{หรือ} \quad \vec{F}'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(t_0 + h) - \vec{F}(t_0)}{h}$$

เรียกว่า **อนุพันธ์ (derivative)** ของ $\vec{F}$ ที่จุด $t_0 \in I$

ทฤษฎีบท 3.5.9 กำหนดให้ $\vec{F}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ เมื่อ $t \in I$ และ x, y, z เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่มีอนุพันธ์บนช่วง I จะได้ว่า $\vec{F}$ มีอนุพันธ์ที่ t และ

$$\vec{F}'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle$$

ตัวอย่าง 3.5.10 กำหนดให้ $\vec{F}(t) = \langle t^2 + t - 3, \cos 2t, e^t \sin t \rangle$ จงหา $(\vec{F} \times \vec{F}')(0)$

ทฤษฎีบท 3.5.11 ให้ $\vec{F}$ และ $\vec{G}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ และ u เป็นฟังก์ชันค่าจริง ถ้า $\vec{F}$, $\vec{G}$ และ u มีอนุพันธ์ที่ t แล้ว

- | | |
|--|---|
| 1. $(\vec{F} + \vec{G})'(t) = \vec{F}'(t) + \vec{G}'(t)$ | 3. $(\vec{F} \cdot \vec{G})'(t) = \vec{F}'(t) \cdot \vec{G}(t) + \vec{F}(t) \cdot \vec{G}'(t)$ |
| 2. $(u\vec{G})'(t) = (u'\vec{F})(t) + (u\vec{F}')(t)$ | 4. $(\vec{F} \times \vec{G})'(t) = \vec{F}'(t) \times \vec{G}(t) + \vec{F}(t) \times \vec{G}'(t)$ |
-

บทพิสูจน์. เห็นได้ชัดจากการใช้บทนิยามและทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต □

ตัวอย่าง 3.5.12 กำหนดให้ $\vec{F} = \langle 1, t, \sin t \rangle$ และ $\vec{G} = \langle t^2, t, 1 \rangle$ จงหา

1. $(\vec{F} \cdot \vec{G})'(t)$

2. $\vec{F}'(t) \cdot \vec{G}(t) + \vec{F}(t) \cdot \vec{G}'(t)$

ปริพันธ์ของฟังก์ชันเวกเตอร์

บทนิยาม 3.5.13 กำหนดให้ $\vec{F}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์บนโดเมน $D \subset \mathbb{R}$ ถ้า x, y, z เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่อินทิเกรตได้บนช่วง $[a, b]$ แล้ว $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันที่ **หาปริพันธ์ได้** (integrable) บนช่วง $[a, b] \subset D$ และ

$$\int_a^b \vec{F}(t) dt = \left\langle \int_a^b x(t) dt, \int_a^b y(t) dt, \int_a^b z(t) dt \right\rangle$$

ทฤษฎีบท 3.5.14 ให้ $\vec{F}$ และ $\vec{G}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ และ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัว และ u เป็นฟังก์ชันค่าจริง และ $\vec{C}$ เป็นเวกเตอร์คงตัว แล้ว

1. $\int_a^b (c_1 \vec{F}(t) + c_2 \vec{G}(t)) dt = c_1 \int_a^b \vec{F}(t) dt + c_2 \int_a^b \vec{G}(t) dt$
2. $\int_a^b \vec{F}(t) dt = \int_a^c \vec{F}(t) dt + \int_c^b \vec{F}(t) dt$ เมื่อ $a < c < b$
3. $\int_a^b (u \vec{C}(t)) dt = \int_a^b u(t) dt \vec{C}$
4. $\int_a^b (\vec{C} \cdot \vec{F})(t) dt = \vec{C} \cdot \int_a^b \vec{F}(t) dt$ เมื่อ $\vec{C} \cdot \vec{F}$ อินทิเกรตได้บนช่วง $[a, b]$

ตัวอย่าง 3.5.15 กำหนดให้ $\vec{F}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$ และ $\vec{C} = \langle 1, 2, 1 \rangle$ จงหา

1. $\int_0^\pi \vec{F}(t) dt$
2. $\int_0^\pi \vec{C} \cdot \vec{F}(t) dt$

ตัวอย่าง 3.5.16 จงหา $\int_0^{2\pi} \|\langle \cos t, \sin t, 1 \rangle\| dt$

ตัวอย่าง 3.5.17 ถ้านิยามความยาวของส่วนเส้นโค้ง $\vec{r}(t)$ บนช่วง $[a, b]$ คือ

$$L(a, b) = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt$$

จงหา $L(0, 2\pi)$ ของเส้นโค้ง $\vec{r}(t) = \langle 3\cos t, 5\sin t, 4\cos t \rangle$

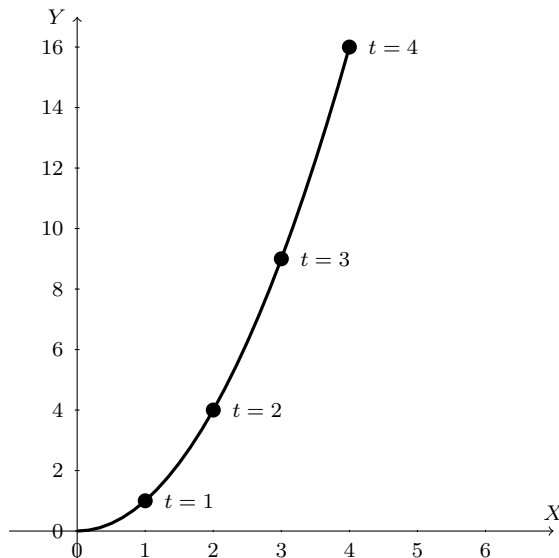
กราฟแสดงการเคลื่อนที่ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

กราฟของการเคลื่อนที่ที่ $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$ เมื่อ $a \leq t \leq b$ ซึ่งเรียกว่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่ คือ

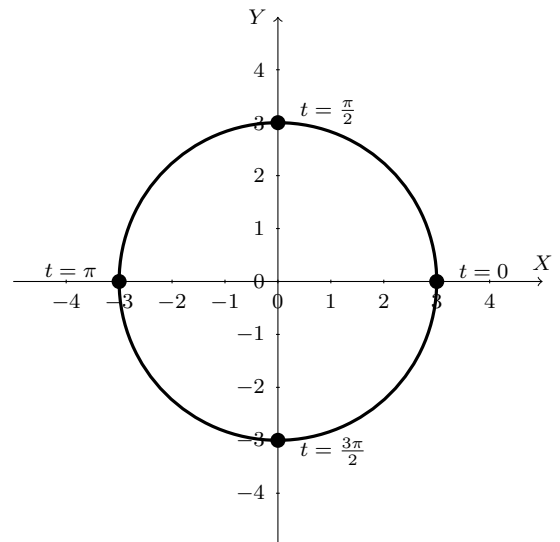
กราฟความสัมพันธ์ $\{(x(t), y(t)) : \vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle \text{ เมื่อ } a \leq t \leq b\}$

กราฟตัวอย่างของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^2$

$$\vec{r}(t) = \langle t, t^2 \rangle \text{ เมื่อ } 0 \leq t \leq 4$$



$$\vec{r}(t) = \langle 3\sin t, 3\cos t \rangle \text{ เมื่อ } 0 \leq t \leq 2\pi$$

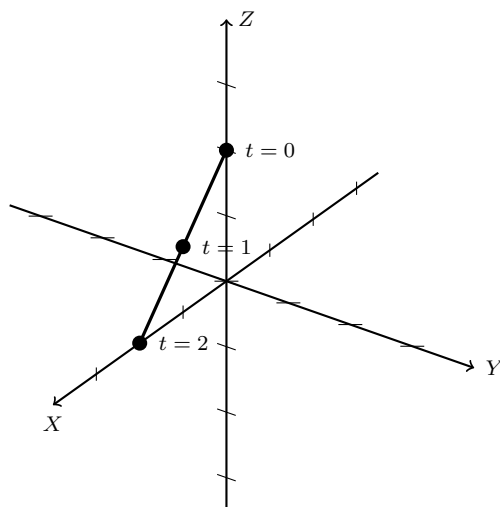


กราฟของการเคลื่อนที่ที่ $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ เมื่อ $a \leq t \leq b$ ซึ่งเรียกว่าฟังก์ชันการเคลื่อนที่คือ

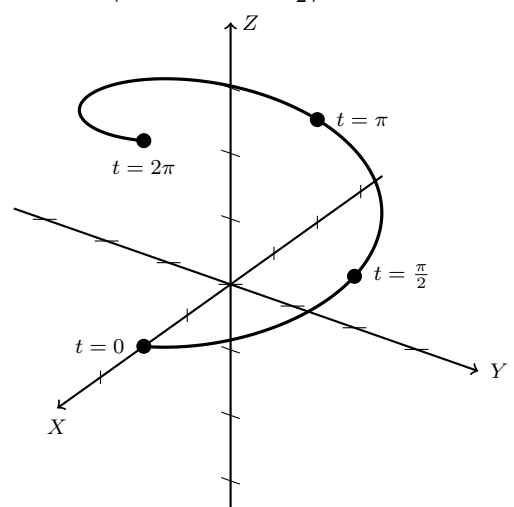
กราฟความสัมพันธ์ $\{(x(t), y(t), z(t)) : \vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle \text{ เมื่อ } a \leq t \leq b\}$

กราฟตัวอย่างของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$

$$\vec{r}(t) = \langle t, 0, 2-t \rangle \text{ เมื่อ } 0 \leq t \leq 2$$



$$\vec{r}(t) = \langle 2\cos t, 2\sin t, \frac{t}{2} \rangle \text{ เมื่อ } 0 \leq t \leq 2\pi$$



เวกเตอร์ความเร็วและความเร่ง

ให้ $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$ หรือ $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่

เวกเตอร์ความเร็ว $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$

อัตราความเร็ว $v(t) = \|\vec{v}(t)\|$

เวกเตอร์ความเร่ง $\vec{a}(t) = \vec{r}''(t) = \vec{v}'(t)$

อัตราความเร่ง $a(t) = \|\vec{a}(t)\|$

ตัวอย่าง 3.5.18 ให้ $\vec{r}(t) = \langle 2\cos t, 2\sin t, 3t \rangle$ เมื่อ $0 \leq t \leq 2\pi$ เป็นสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุ
จงหาตำแหน่งของการเคลื่อนที่ เวกเตอร์ความเร็ว อัตราความเร็ว เวกเตอร์ความเร่ง อัตราความเร่ง
เมื่อเวลา $t = \frac{\pi}{3}$

ตัวอย่าง 3.5.19 รถคันหนึ่งเคลื่อนที่ในระนาบ XY ด้วยความเร่ง $\vec{a}(t) = 2\vec{i} \text{ m/s}^2$ ถ้ารถคันนี้เริ่มเคลื่อนที่เมื่อเวลา 0 วินาที มีความเร็วเริ่มต้น $\vec{v}_0 = \vec{v}(0) = 10\vec{i} - 5\vec{j} \text{ m/s}$

1. เวกเตอร์ความเร็วที่เวลาใด ๆ
2. เวกเตอร์ความเร็วและอัตราความเร็วที่เวลา 1 วินาที
3. ฟังก์ชันการเคลื่อนที่ของวัตถุที่เวลาใด ๆ

เวกเตอร์สัมผัสหน่วย เวกเตอร์แนวฉากหน่วย และเวกเตอร์แนวฉากคู่

ให้เส้นโค้งหนึ่งเป็นกราฟฟังก์ชันเวกเตอร์ $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ เมื่อ $a \leq t \leq b$

1. จะได้ว่า $\vec{r}'(t)$ เป็นเวกเตอร์ในแนวสัมผัสของเส้นโค้ง ณ จุด $\vec{r}(t)$ เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยและทิศเดียวกันกับ $\vec{r}'(t)$ เรียกว่า **เวกเตอร์สัมผัสหน่วย** (unit tangent vector) ณ จุด $\vec{r}(t)$ เขียนแทนด้วย $\vec{T}(t)$ นั่นคือ

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \quad \text{เมื่อ} \quad \|\vec{r}'(t)\| \neq 0$$

เส้นตรงที่ผ่านจุด $\vec{r}(t)$ และขนานกับ $\vec{T}(t)$ เรียก **เส้นสัมผัส** (tangent) ของเส้นโค้ง ณ จุด $\vec{r}(t)$

2. เนื่องจาก $\vec{T}'(t)$ เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ $\vec{T}(t)$ ณ จุด $\vec{r}(t)$ เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยและทิศเดียวกันกับ $\vec{T}'(t)$ เรียกว่า **เวกเตอร์แนวฉากหน่วย** (unit normal vector) เขียนแทนด้วย $\vec{N}(t)$ นั่นคือ

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} \quad \text{เมื่อ} \quad \|\vec{T}'(t)\| \neq 0$$

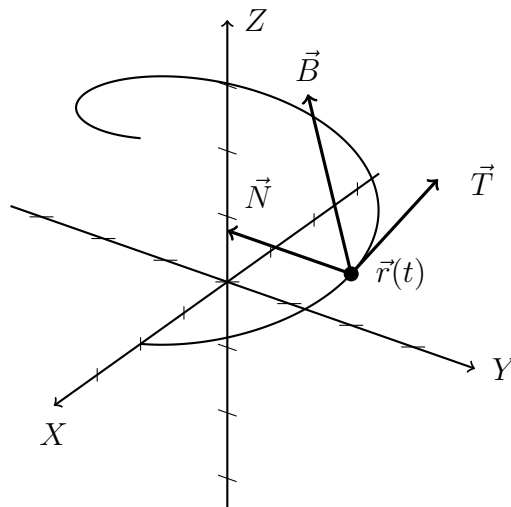
เส้นตรงที่ผ่านจุด $\vec{r}(t)$ และขนานกับ $\vec{N}(t)$ เรียก **เส้นแนวฉาก** (normal line) ของเส้นโค้ง ณ จุด $\vec{r}(t)$

3. **เวกเตอร์แนวฉากคู่** (binormal vector) ณ จุด $\vec{r}(t)$ เขียนแทนด้วย $\vec{B}(t)$ นิยามโดย

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$$

เส้นตรงที่ผ่านจุด $\vec{r}(t)$ และขนานกับ $\vec{B}(t)$ เรียก **เส้นแนวฉากคู่** (binormal line) ของเส้นโค้ง ณ จุด $\vec{r}(t)$

รูปที่ 3.26: $\vec{T}(t)$, $\vec{N}(t)$ และ $\vec{B}(t)$ ในแนวสัมผัสของเส้นโค้ง ณ จุด $\vec{r}(t)$



ตัวอย่าง 3.5.20 ให้ $\vec{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$ เมื่อ $0 \leq t \leq 2\pi$ เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่ จงหาเวกเตอร์สัมผัสหน่วย เวกเตอร์แนวฉากหน่วย และเวกเตอร์แนวฉากคู่ เมื่อ $t = \pi$

ตัวอย่าง 3.5.21 ให้ $\vec{r}(t) = \langle 1 + \sin t, 1 - \cos t, 2 \rangle$ เมื่อ $0 \leq t \leq 2\pi$ เป็นสมการการเคลื่อนที่
จงหาสมการของเส้นสัมผัส เส้นแนวฉาก และเส้นแนวฉากคู่ของเส้นโค้งที่จุด $(1, 2, 2)$

แบบฝึกหัด 3.5

1. จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1.1 $\lim_{t \rightarrow 1} \left\langle 2t + 1, \frac{t-1}{1-\sqrt{t}}, t \sin \pi t \right\rangle$

1.3 $\lim_{t \rightarrow 0} \left\langle t^2 + 1, \frac{t^3 - 1}{t^2 - 1}, 1 - 2t \right\rangle$

1.2 $\lim_{t \rightarrow 0} \left\langle 2 - t^2, \tan t, \frac{\sin t}{t} \right\rangle$

1.4 $\lim_{t \rightarrow 0} \left\langle t \tan t, 2t^3, \frac{1}{t-1} \right\rangle$

2. กำหนดให้ $\vec{F}(t) = \langle 1+t, 1+2t, 1+3t \rangle$ และ $\vec{G}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$ จงหา

2.1 $\vec{F}'(t) + \vec{G}'(t)$

2.3 $(\vec{F}' \times \vec{G}')(t)$

2.2 $(\vec{F} \cdot \vec{G})'(t)$

2.4 $(\vec{F} \cdot \vec{G}')(t)$

3. จงหาค่าต่อไปนี้

3.1 $\int_1^3 \langle t, 2t+1, t^2 \rangle dt$

3.3 $\int_0^1 \langle 2\cos t, 3\sin t + 1, \sec^2 2t \rangle dt$

3.2 $\int_0^\pi \langle t \sin t, \cos^2 t, t+1 \rangle dt$

3.4 $\int_0^1 \left\langle e^t, \frac{1}{1-t}, \sqrt{2-t} \right\rangle dt$

4. จงเขียนกราฟแสดงการเคลื่อนที่ของฟังก์ชันเวกเตอร์ต่อไปนี้

4.1 $\vec{r}(t) = \langle t, 2+t \rangle$ เมื่อ $1 \leq t \leq 3$

4.2 $\vec{r}(t) = \langle t, t^2 + 1 \rangle$ เมื่อ $1 \leq t \leq 4$

4.3 $\vec{r}(t) = \langle 1+t, 2+t \rangle$ เมื่อ $0 \leq t \leq 5$

4.4 $\vec{r}(t) = \langle \sin t, \cos t, 4 \rangle$ เมื่อ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

4.5 $\vec{r}(t) = \langle 2\sin t, 3\cos t, t \rangle$ เมื่อ $0 \leq t \leq 2\pi$

5. จงหา ตำแหน่งของการเคลื่อนที่ เวกเตอร์ความเร็ว อัตราความเร็ว เวกเตอร์ความเร่ง อัตราความเร่ง เมื่อกำหนดสมการการเคลื่อนที่ดังนี้ ขณะเวลาที่กำหนดให้

5.1 $\vec{r}(t) = \langle t, t^2 + 1 \rangle$ เมื่อ $t = 2$

5.2 $\vec{r}(t) = \left\langle t + \frac{1}{t}, t - \frac{1}{t} \right\rangle$ เมื่อ $t = 1$

5.3 $\vec{r}(t) = \langle \sin 3t, \cos 2t \rangle$ เมื่อ $t = \frac{\pi}{4}$

5.4 $\vec{r}(t) = \langle \sin^2 t, e^t \cos t, t \rangle$ เมื่อ $t = 0$

5.5 $\vec{r}(t) = \langle \ln 2t, e^{2t}, t \cos t \rangle$ เมื่อ $t = 1$

5.6 $\vec{r}(t) = \langle \tan^2 t, \cos t \sin t, 2t \rangle$ เมื่อ $t = \frac{\pi}{3}$

6. เรือลำนี้เคลื่อนที่ในระนาบ XY โดยมีฟังก์ชันตำแหน่งที่เวลาใด ๆ ในระบบพิกัดฉากเป็น $x(t) = 3t^2 - 2t + 1$ และ $y(t) = -t^2 + 2t - 3$ จงหาอัตราความเร็วของเรือลำนี้ที่เวลา 3 วินาที
7. ถ้าการเดินทางของอนุภาคตัวหนึ่งเป็น $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ โดยมี $x(t) = at^2 + bt + c$ และ $y(t) = dt + e$ เมื่อ a, b, c, d, e เป็นค่าคงที่ จงหาการกระจัดของอนุภาคนี้ที่เวลา 0 วินาที
8. เรือมีฟังก์ชันความเร็วเป็น $\vec{v}(t) = at^2\vec{i} + bt\vec{j}$ โดยกำหนดให้ $a = 10 \text{ m/s}^2$ และ $b = -5 \text{ m/s}^2$ จงหา
- 8.1 ความเร็วที่เวลา 1 วินาที และ 2 วินาที
 - 8.2 ความเร่งที่เวลา 1.5 วินาที
 - 8.3 ความเร่งเฉลี่ยระหว่างช่วงเวลา 1 ถึง 2 วินาที
9. จงหา เวกเตอร์สัมผัสหน่วย เวกเตอร์แนวฉากหน่วย และเวกเตอร์แนวฉากคู่ ของเส้นโค้งต่อไปนี้ที่จุดที่กำหนด
- 9.1 $\vec{r}(t) = \langle \sin t, \cos t, 0 \rangle$ เมื่อ $t = \pi$
 - 9.2 $\vec{r}(t) = \langle t, t, t^2 \rangle$ เมื่อ $t = 1$
 - 9.3 $\vec{r}(t) = \langle 1 + t, 1 - t, 1 + t^2 \rangle$ เมื่อ $t = 1$
 - 9.4 $\vec{r}(t) = \langle \sin t, \cos t, \sin t \rangle$ เมื่อ $t = 0$
 - 9.5 $\vec{r}(t) = \langle \sin^2 t, \cos^2 t, t \rangle$ เมื่อ $t = \pi$
 - 9.6 $\vec{r}(t) = \langle \sin t + \cos t, \sin t - \cos t, e^t \rangle$ เมื่อ $t = 0$
10. จงหาสมการของเส้นสัมผัส เส้นแนวฉาก และเส้นแนวฉากคู่ของเส้นโค้งต่อไปนี้ที่จุดที่กำหนด
- 10.1 $\vec{r}(t) = \langle \sin t \cos t, \sin t + \cos t, t \rangle$ เมื่อ $t = 0$
 - 10.2 $\vec{r}(t) = \langle \sin^2 t, \cos^2 t, t \rangle$ เมื่อ $t = \pi$
 - 10.3 $\vec{r}(t) = \langle t, t, t^2 \rangle$ เมื่อ $t = 1$
 - 10.4 $\vec{r}(t) = \langle 1 + t^2, 1 - t^2, t - 2 \rangle$ เมื่อ $t = 1$
 - 10.5 $\vec{r}(t) = \langle 3 \sin t, 5 \cos t, 4 \sin t \rangle$ เมื่อ $t = \frac{\pi}{2}$
11. ให้ $\vec{r}(t) = \langle 2 \cos t, 2 \sin t, t \rangle$ เมื่อ $0 \leq t \leq 2\pi$ เป็นสมการของเส้นโค้ง จงหาสมการของเส้นสัมผัส เส้นแนวฉาก และเส้นแนวฉากคู่ของเส้นโค้งที่จุด $(-2, 0, \pi)$

แบบฝึกหัดบทที่ 3

1. จงหาสมการของเส้นตรงที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้
 - 1.1 ผ่านจุด $(0, 1, 2)$ และ $(1, 3, -1)$
 - 1.2 ผ่านจุด $(0, -1, 1)$ และขนานกับ $\langle -1, 3, 7 \rangle$
 - 1.3 ผ่านจุด $(1, 0, 2)$ และขนานกับเส้นตรง $x - 1 = y + 1 = 2z$
2. จงพิจารณาว่าจุด $A(1, 2, 1)$, $B(2, 3, -2)$ และ $C(1, 2, 3)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่
3. จงระยะทางระหว่าง $L_1 : 2x = \frac{z-1}{3}, y = 1$ และ $L_2 : x = 1 + t, y = 3 + t, z = 3 - t$
4. จงหาสมการของระนาบที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้
 - 4.1 ผ่านจุด $(-2, 3, 4)$ และเวกเตอร์แนวฉาก $\vec{N} = \langle 0, -1, 1 \rangle$
 - 4.2 ผ่านจุด $(2, 1, 0)$, $(1, 0, 3)$ และ $(2, -1, 4)$
 - 4.3 ผ่านเส้นตรง $x = y = z$ และ $x + 1 = \frac{y + 3}{2} = 2z$
5. จงหาจุดบนระนาบ $x + 3y + z = 1$ ซึ่งอยู่ใกล้ที่สุดกับจุด $(-1, 0, 2)$
6. ถ้า $\vec{a} = \langle x, 1, 2 \rangle$ ตั้งฉากกับ $\vec{b} = \langle -1, 1, 3 \rangle$ จงหาเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับทั้ง $\vec{a}$ และ $\vec{b}$
7. ให้ $A(1, 2, 3)$, $B(2, 5, 5)$ และ $C(0, 1, 2)$ เป็นจุดในปริภูมิสามมิติ ถ้าลากเส้นตรงจากจุด B ไปตั้งฉากกับเส้นตรง AC ที่จุด D จงหาพิกัดของจุด D
8. ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติซึ่งตั้งฉากกัน โดยที่ $\|\vec{u} - 2\vec{v}\| = 3$ และ $\|2\vec{u} + \vec{v}\| = 4$ จงหา $\|\vec{u} + \vec{v}\|$
9. จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น $A(-1, 2, 3)$, $B(2, -1, 3)$ และ $C(4, -1, 2)$
10. จงตรวจสอบว่า $\vec{a} = \langle 1, 2, 3 \rangle$, $\vec{b} = \langle 4, 5, 6 \rangle$ และ $\vec{c} = \langle 7, 8, 9 \rangle$ อยู่บนระนาบเดียวกันหรือไม่
11. จงหาปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนาน ซึ่งมีด้านประชิดเป็น $\vec{a} = \langle 2, 1, -3 \rangle$, $\vec{b} = \langle 4, -1, 0 \rangle$ และ $\vec{c} = \langle -1, 4, -1 \rangle$
12. จงยกตัวอย่างเวกเตอร์ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ ใน $\mathbb{R}^3$ ที่ทำให้ $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$
13. ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ ถ้า $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ จงแสดงว่า $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$
14. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด ซึ่งตัดและตั้งฉากกับเส้นตรง $x = \frac{4-y}{2} = z - 2$
15. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1, 2, -1)$ และจุดตัดของเส้นตรง

$$L_1 : x - 1 = \frac{y - 1}{2} = z \quad \text{และ} \quad L_2 : \frac{x}{3} = \frac{y - 3}{2} = z - 1$$

16. จงหาพิกัดบนเส้นตรง L ที่อยู่ใกล้จุดกำเนิดมากที่สุด เมื่อ $L : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$
17. ให้ $A(-2, 3, k)$ เป็นจุดบนระนาบ $M : 3x - 2y + 4z = 12$ จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด A และตั้งฉากกับระนาบ M
18. จงหาจุดบนระนาบ $x - 2y + 3z = 4$ ที่อยู่ใกล้ที่สุดกับจุด $(2, 3, -2)$
19. จงหาสมการเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ $x + y + z = 1$ และ $2x - y + z = 3$
20. จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุด $(1, 2, 3)$, $(2, 0, 1)$ และตั้งฉากกับระนาบ $x + y - z = 1$
21. จงหาสมการระนาบที่ผ่านเส้นตรง $x = y = z$ และเส้นตรง $\frac{x - 1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z + 1}{4}$
22. จงหามุมระหว่างเส้นตรง $\frac{x}{6} = y = \frac{1 - z}{2}$ กับระนาบ $x - 2y + 2z = 4$
23. จงหามุมระหว่างระนาบ $z + 2y - z = 2$ และ $2x + y + z = 3$
24. กำหนดให้ $\vec{F} = \langle 1, 0, t \rangle$ และ $\vec{G} = \langle 0, \cos t, t \rangle$ จงหา $(\vec{F} \times \vec{G})'(0)$
25. จงหา $\int_0^{\pi/4} \| \langle 5 \tan t, 3, 4 \rangle \| dt$
26. จงหา ตำแหน่งของการเคลื่อนที่ เวกเตอร์ความเร็ว อัตราเร็ว เวกเตอร์ความเร่ง อัตราเร่ง เมื่อกำหนดสมการการเคลื่อนที่คือ

$$\vec{r}(t) = \langle \sin^2 t, e^t \cos t, t \rangle \quad \text{เมื่อ} \quad t = 0$$

27. จงหา เวกเตอร์สัมผัสหน่วย เวกเตอร์แนวฉากหน่วย เวกเตอร์แนวฉากคู่ ของเส้นโค้ง

$$\vec{r}(t) = \langle 3 \sin t, -3 \cos t, 4 \rangle \quad \text{เมื่อ} \quad t = \pi$$

28. จงหาสมการของเส้นสัมผัส เส้นแนวฉาก และเส้นแนวฉากคู่ของเส้นโค้ง

$$\vec{r}(t) = \langle 3 \sin t, 5 \cos t, 4 \sin t \rangle \quad \text{เมื่อ} \quad t = 0$$

บทที่ 4

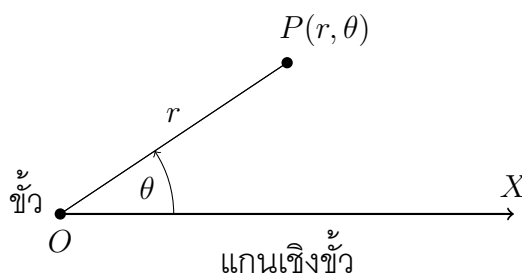
ระบบพิกัดเชิงขั้ว

4.1 พิกัดเชิงขั้ว

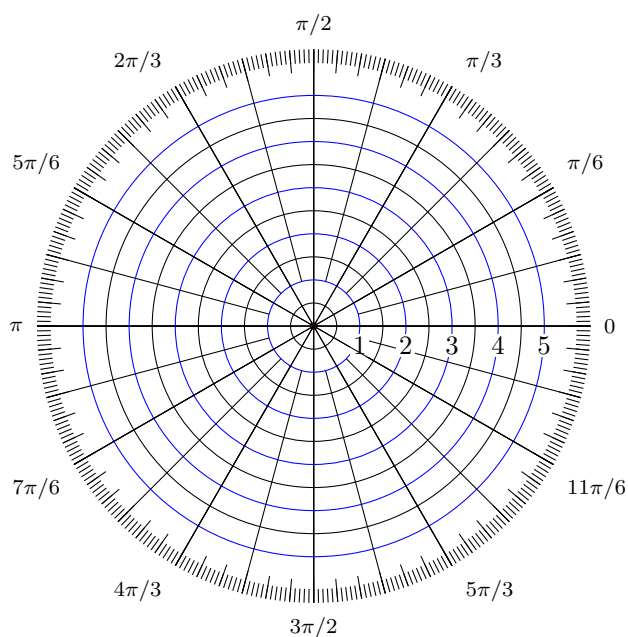
บทนิยาม 4.1.1 ให้ P เป็นจุดใด ๆ ในระนาบ XY

ถ้า r เป็นระยะทางจาก O (จุดกำเนิด) ไปยังจุด P และส่วนของเส้นตรง OP ทำมุม θ กับแกน OX เรียกจุด (r, θ) ว่าพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinate) ของจุด P

รูปที่ 4.1: แสดงความหมายพิกัดเชิงขั้ว (r, θ)

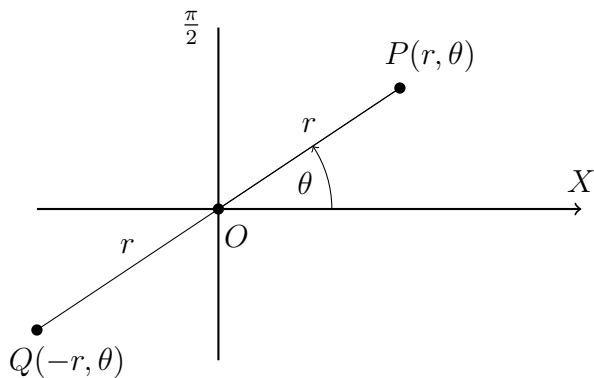


ตัวอย่าง 4.1.2 จงเขียนจุด $A(3, \frac{\pi}{4})$, $B(4, \frac{2\pi}{3})$, $C(5, -\pi)$ และ $D(3.5, -\frac{\pi}{6})$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

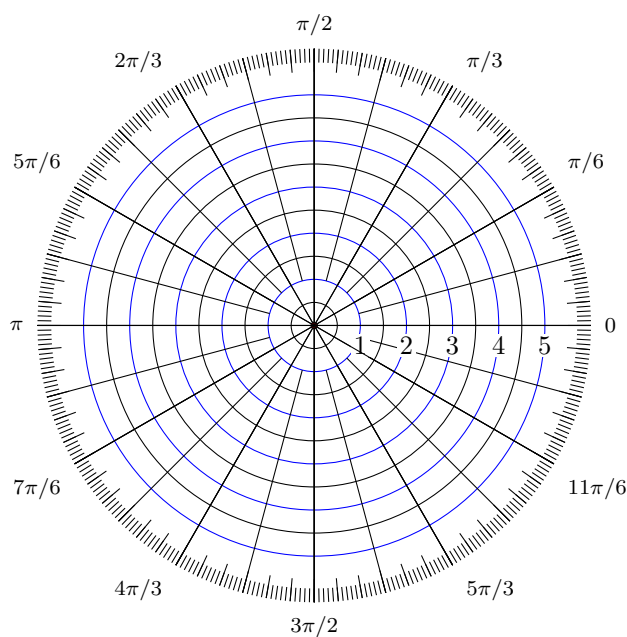


บทนิยาม 4.1.3 ถ้า P มีพิกัดเชิงขั้วเป็น (r, θ) เมื่อ $r > 0$ แล้ว $(-r, \theta)$ หมายถึงพิกัดของจุดปลายที่ได้จากการลากเส้นตรงจากขั้วไปในทิศตรงกันข้ามกับ $\overrightarrow{OP}$ เป็นระยะ r

รูปที่ 4.2: แสดงพิกัดเชิงขั้ว (r, θ) และ $(-r, \theta)$



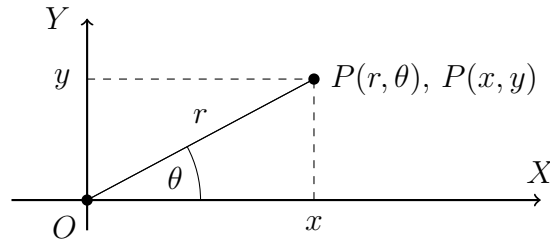
ตัวอย่าง 4.1.4 จงเขียนจุด $A(-3, \frac{\pi}{3})$, $B(-4, \frac{3\pi}{4})$ และ $C(-5, -\pi)$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว



ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดเชิงขั้วและพิกัดฉาก

ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดเชิงขั้ว (r, θ) และพิกัดฉาก (x, y) ของจุด P ใด ๆ ที่ไม่ใช่จุดกำเนิด

รูปที่ 4.3: ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดเชิงขั้วและพิกัดฉาก



จะได้ $x^2 + y^2 = r^2$

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad \text{และ} \quad \theta = \arctan \left(\frac{y}{x} \right)$$

ตัวอย่าง 4.1.5 จงหาพิกัดเชิงขั้วของจุดพิกัดฉากต่อไปนี้ เมื่อ $r > 0$ และ $0 \leq \theta < 2\pi$

1. $P(2, 0)$

4. $S(-\sqrt{3}, -1)$

2. $Q(2, 2)$

5. $T(0, -3)$

3. $R(-2, 2\sqrt{3})$

6. $U(3, -3)$

ตัวอย่าง 4.1.6 จงหาพิกัดเชิงขั้วของจุดพิกัดฉาก $(1, 1)$ มาอย่างน้อย 3 จุด

ตัวอย่าง 4.1.7 จงหาพิกัดฉากของจุดซึ่งมีพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้

1. $A(4, \frac{\pi}{3})$

4. $D(4, -\frac{4\pi}{3})$

2. $B(2, \frac{3\pi}{4})$

5. $E(-2, \frac{\pi}{6})$

3. $C(5, \frac{3\pi}{2})$

6. $F(-4, -\frac{3\pi}{4})$

สำหรับฟังก์ชันในระบบพิกัดฉาก $y = f(x)$ อาจแปลงให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = g(\theta) \quad \text{หรือ} \quad \theta = h(r)$$

โดยที่ $x^2 + y^2 = r^2$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ และ $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

ตัวอย่าง 4.1.8 จงแปลงสมการในระบบพิกัดฉากต่อไปนี้ ให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

1. $x = 3$

2. $y = 5$

3. $y = x$

4. $y = x + 1$

ตัวอย่าง 4.1.9 จงแปลงสมการในระบบพิกัดฉากต่อไปนี้ ให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

1. $x^2 + y^2 = 4$

2. $x^2 + y^2 = 2x$

3. $y = x^2$

ตัวอย่าง 4.1.10 จงแปลงสมการในระบบพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้ ให้อยู่ในระบบพิกัดฉาก

1. $r = 3$

2. $r = 4\sin\theta$

ตัวอย่าง 4.1.11 จงแปลงสมการในระบบพิกัดเชิงขั้ว $r = \frac{6}{3\cos\theta + 2\sin\theta}$ ให้อยู่ในระบบพิกัดฉาก

แบบฝึกหัด 4.1

1. จงหาพิกัดเชิงขั้วของจุดในระบบพิกัดฉากต่อไปนี้ เมื่อ $r > 0$ และ $0 \leq \theta < 2\pi$

1.1 $(-1, 1)$

1.3 $(-1, \sqrt{3})$

1.5 $(3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$

1.2 $(-3, -3)$

1.4 $(4\sqrt{3}, -1)$

1.6 $(8, 4\sqrt{3})$

2. จงเขียนจุดในระบบพิกัดฉาก และหาพิกัดฉากของจุดต่อไปนี้

2.1 $A(2, \frac{\pi}{4})$

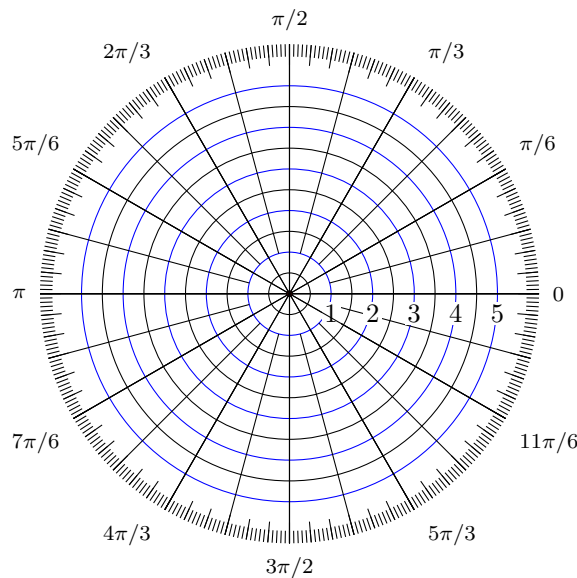
2.3 $C(-3, \frac{5\pi}{6})$

2.5 $E(-5, \frac{11\pi}{6})$

2.2 $B(-1, \frac{3\pi}{3})$

2.4 $D(4, -\frac{\pi}{4})$

2.6 $E(2.5, \frac{4\pi}{3})$



3. จงหาพิกัดเชิงขั้วของจุดพิกัดฉากต่อไปนี้มาอย่างน้อย 3 จุด

3.1 $(-1, 1)$

3.2 $(-3, -\sqrt{3})$

3.3 $(\sqrt{2}, \sqrt{6})$

4. จงเขียนสมการในระบบพิกัดฉากให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

4.1 $x + y = 2$

4.4 $x^2 + y^2 = 4$

4.7 $y^2 = 4x$

4.2 $y = x^2$

4.5 $x^2 + y^2 = 2x$

4.8 $4x^2 + 9y^2 = 36$

4.3 $x^2 + y^2 = 2y$

4.6 $x^2 - y^2 = xy$

4.9 $x^2 - y^2 = 1$

5. จงเขียนสมการในระบบเชิงขั้วให้อยู่ในระบบพิกัดฉาก

5.1 $r = 2$

5.4 $r = 1 - \sin\theta$

5.7 $r = \tan\theta \csc\theta$

5.2 $r = 5\sin\theta$

5.5 $r = \frac{1}{1 - \sin\theta}$

5.8 $r = \sin 2\theta$

5.3 $r = 2\cos 2\theta$

5.6 $r = \tan\theta$

5.9 $r = \sin\theta + \cos\theta$

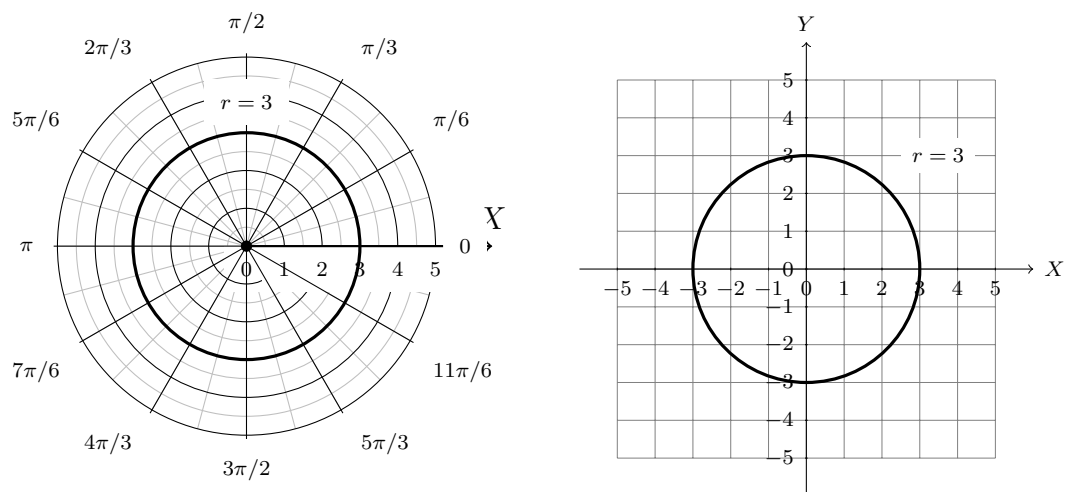
4.2 กราฟของสมการในระบบพิกัดเชิงขั้ว

การเขียนกราฟของสมการ $r = f(\theta)$ หรือ $\theta = h(r)$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว มีแนวคิดเหมือนกับการเขียนกราฟของสมการในระบบพิกัดฉาก โดยการนำจุด (r, θ) ที่สอดคล้องสมการไปเขียนลงบนพิกัดต่อไปตัวอย่างกราฟของระบบพิกัดฉากที่สำคัญ

1. สมการ $f(\theta) = k$

สมการ $r = f(\theta) = k$ เมื่อ $k \neq 0$ เป็นกราฟวงกลมที่มีรัศมี $|k|$ มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$

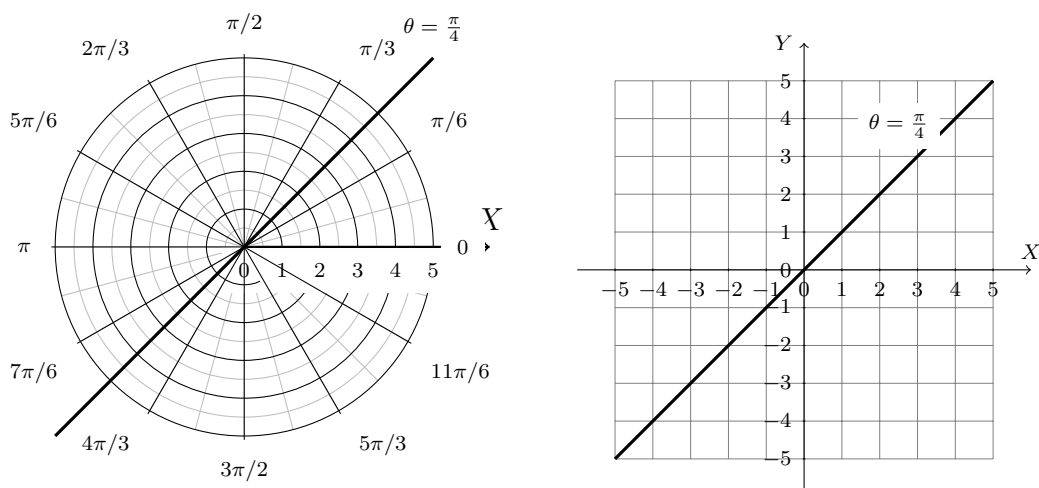
รูปที่ 4.4: ตัวอย่างกราฟของ $r = 3$ และ $r = -4$



2. สมการ $\theta = \theta_0$

สมการ $\theta = \theta_0$ เป็นกราฟเส้นตรงที่ทำมุม θ_0 กับแกนเชิงขั้ว

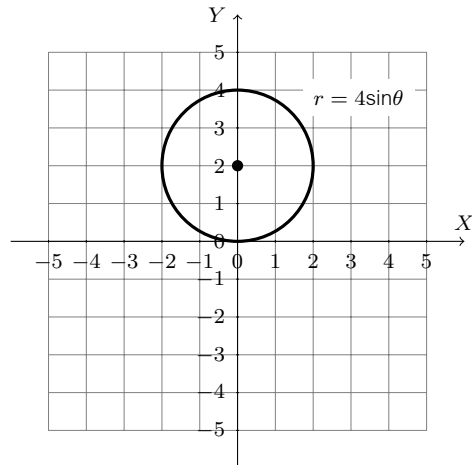
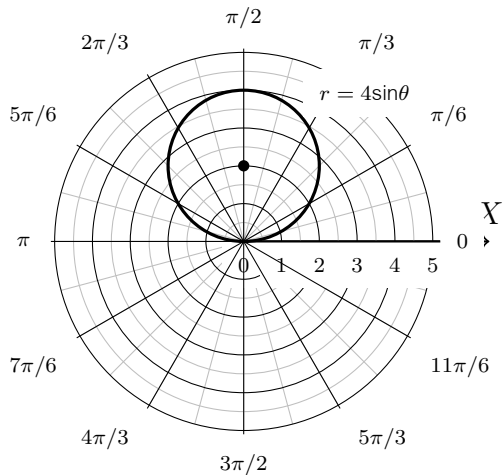
รูปที่ 4.5: ตัวอย่างกราฟของ $\theta = \frac{\pi}{4}$



3. สมการ $f(\theta) = 2k\sin\theta$ และ $f(\theta) = 2k\cos\theta$

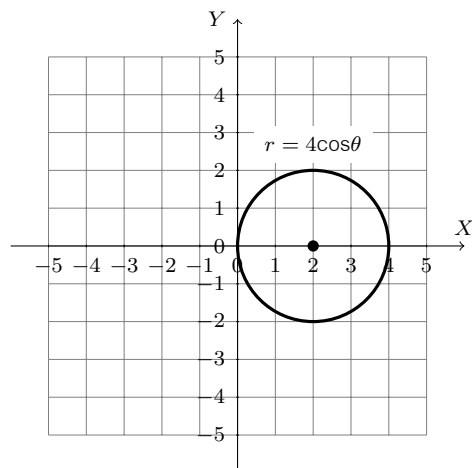
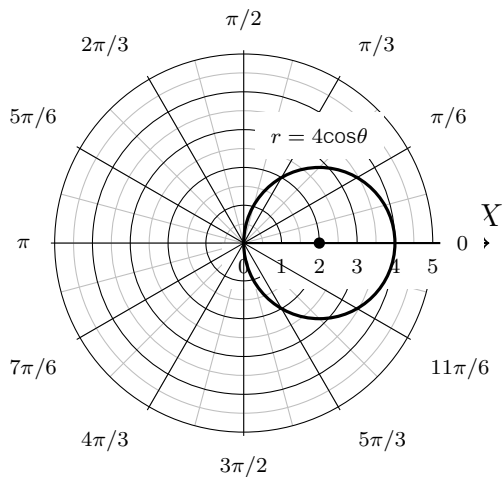
สมการ $r = f(\theta) = 2k\sin\theta$ เมื่อ $k \neq 0$ และ $0 \leq \theta \leq \pi$ เป็นกราฟวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(k, \frac{\pi}{2})$ รัศมี $|k|$

รูปที่ 4.6: ตัวอย่างกราฟของ $r = 4\sin\theta$



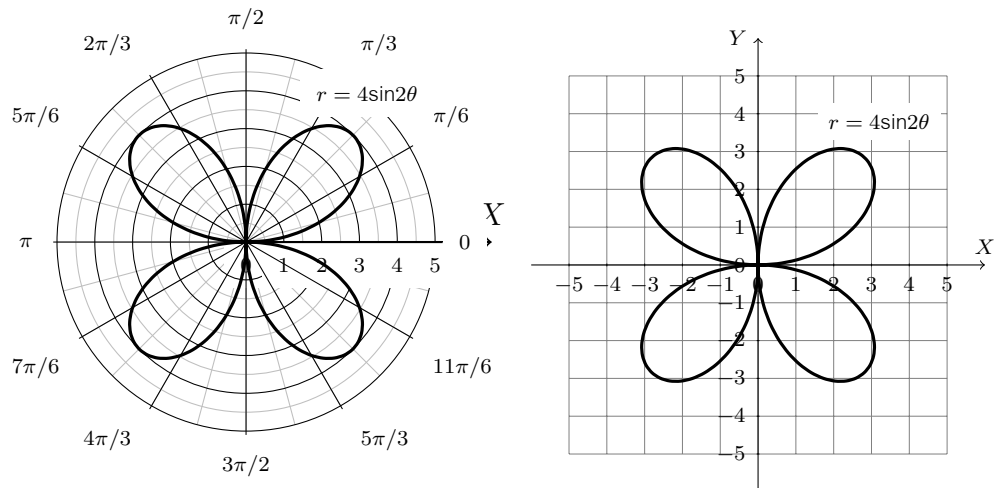
สมการ $r = f(\theta) = 2k\cos\theta$ เมื่อ $k \neq 0$ และ $0 \leq \theta \leq \pi$ เป็นกราฟวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(k, 0)$ รัศมี $|k|$

รูปที่ 4.7: ตัวอย่างกราฟของ $r = 4\cos\theta$

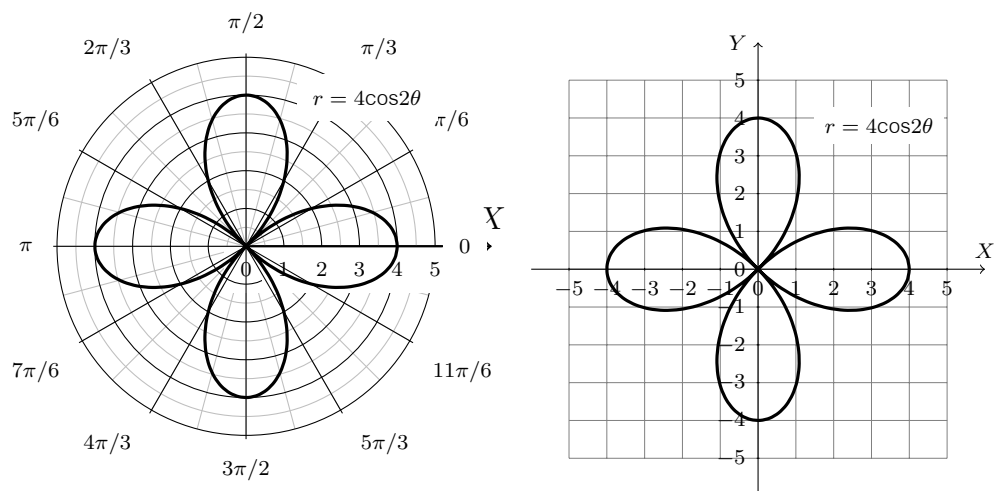


4. สมการ $f(\theta) = k\sin 2n\theta$ และ $f(\theta) = k\cos 2n\theta$

สมการ $r = f(\theta) = k\sin 2n\theta$ เมื่อ $k \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ และ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ เป็นกราฟกลีบกุหลาบ $4n$ กลีบ โดยที่แกนสมมาตรของแต่ละกลีบไม่อยู่บนแกน X และ Y

รูปที่ 4.8: ตัวอย่างกราฟของ $r = 4\sin 2\theta$ 

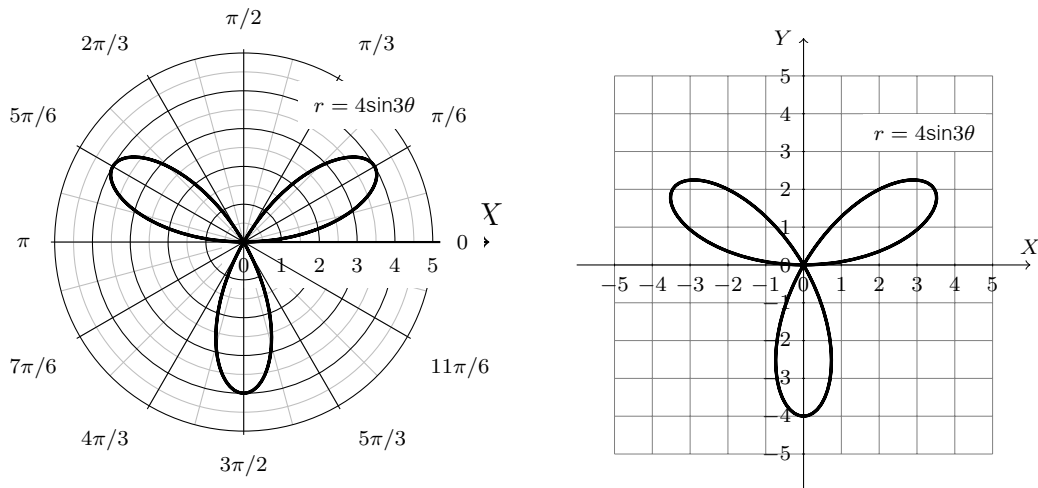
สมการ $r = f(\theta) = k\cos 2n\theta$ เมื่อ $k \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$ และ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ เป็นกราฟกลีบกุหลาบ $4n$ กลีบ โดยที่มีแกนสมมาตรของบางกลีบอยู่บนแกน X และ Y

รูปที่ 4.9: ตัวอย่างกราฟของ $r = 4\cos 2\theta$ 

5. สมการ $f(\theta) = k\sin(2n - 1)\theta$ และ $f(\theta) = k\cos(2n - 1)\theta$

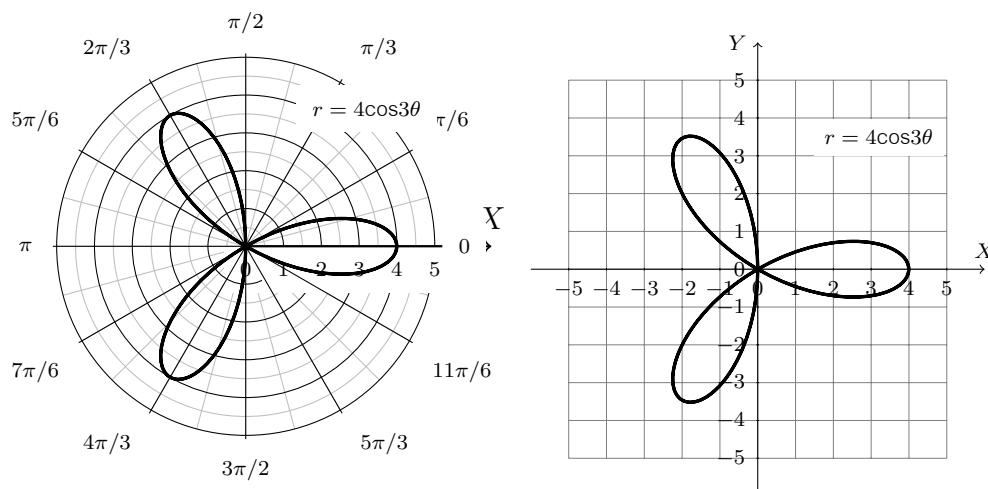
สมการ $r = f(\theta) = k\sin(2n - 1)\theta$ เมื่อ $k \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ และ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ เป็นกราฟกลีบกุหลาบ $2n - 1$ กลีบ โดยที่มีแกนสมมาตรของบ่วงกลีบอยู่บนแกน Y

รูปที่ 4.10: ตัวอย่างกราฟของ $r = 4\sin 3\theta$



สมการ $r = f(\theta) = k\cos(2n - 1)\theta$ เมื่อ $k \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ และ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ เป็นกราฟกลีบกุหลาบ $2n - 1$ กลีบ โดยที่มีแกนสมมาตรของบ่วงกลีบอยู่บนแกน X

รูปที่ 4.11: ตัวอย่างกราฟของ $r = 4\cos 3\theta$



6. สมการ $f(\theta) = r = a + b\sin\theta$ และ $f(\theta) = r = a + b\cos\theta$

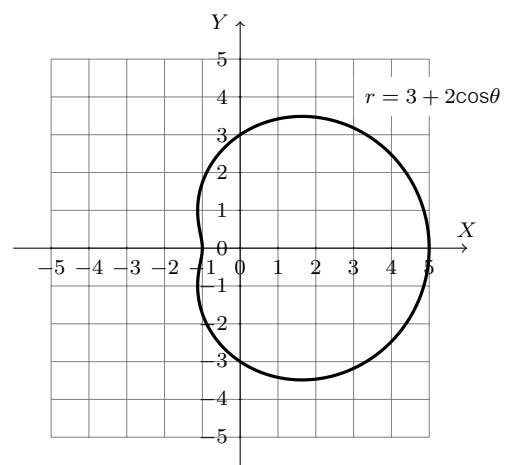
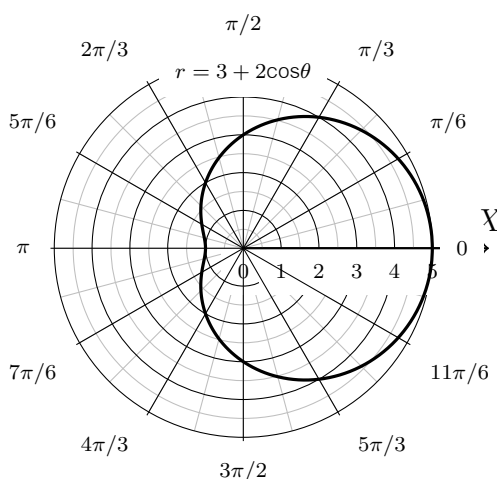
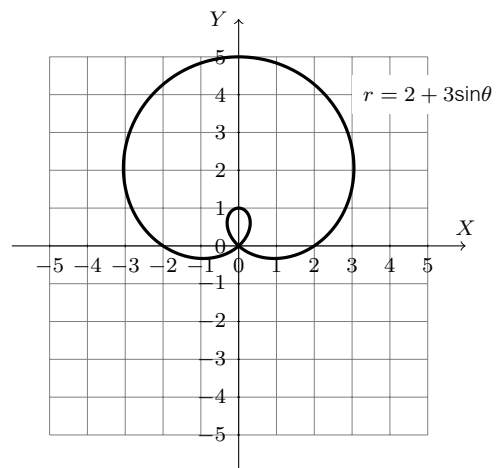
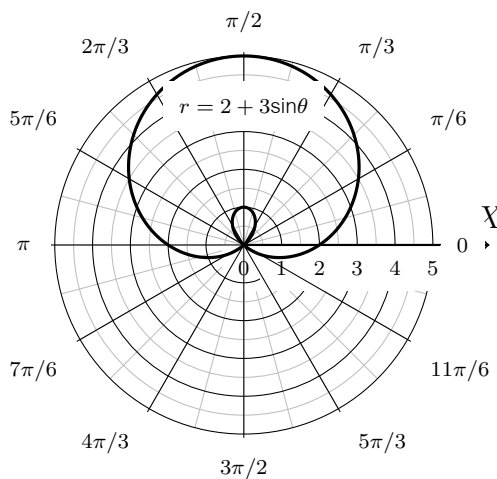
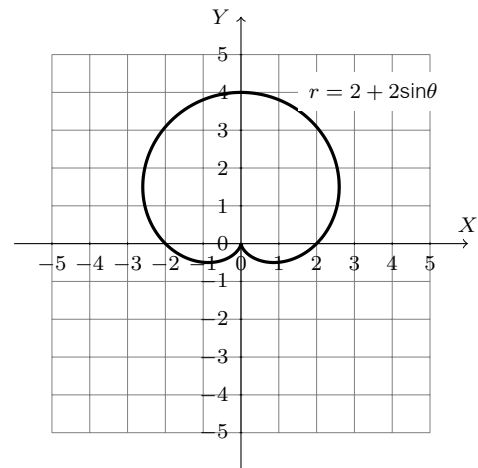
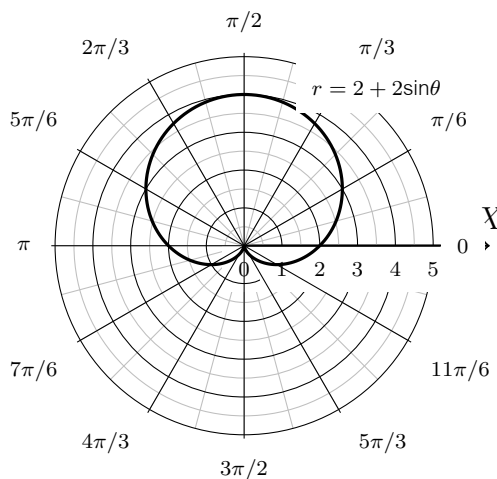
ถ้า $|a| = |b|$ แล้วกราฟนี้จะผ่านขั้ว และเรียกกราฟนี้ว่า **คาร์ดิออยด์** (cardioid)

ถ้า $|a| \neq |b|$ จะเรียกกราฟนี้ว่า **ลิมาคอน** (limacon)

ถ้า $|a| > |b|$ กราฟนี้จะไม่ผ่านขั้ว

ถ้า $|a| < |b|$ กราฟนี้จะผ่านขั้ว และมีวงวน (loop) อยู่ภายใน

รูปที่ 4.12: ตัวอย่างกราฟคาร์ดิออยด์และลิมาคอน



ตัวอย่าง 4.2.1 จงจับคู่ของสมการต่อไปนี้กับกราฟที่กำหนดให้

1. $r = -2$

4. $r = -3\cos 4\theta$

7. $r = 1 - 2\cos\theta$

2. $r = -3\cos\theta$

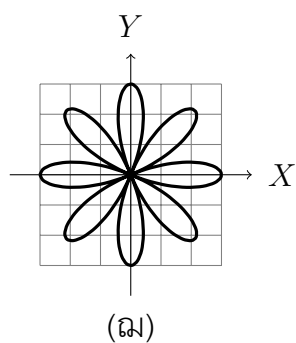
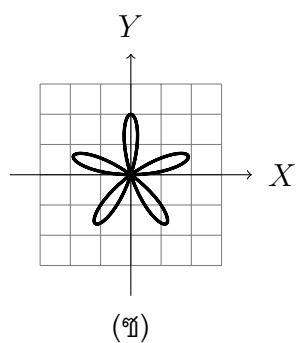
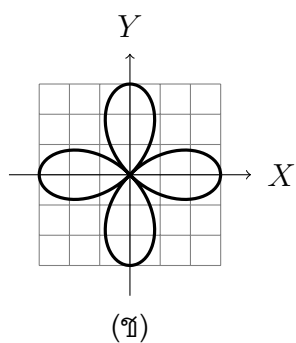
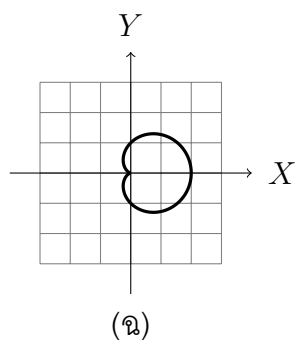
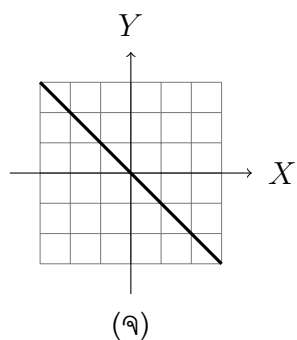
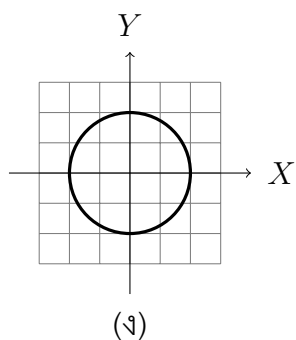
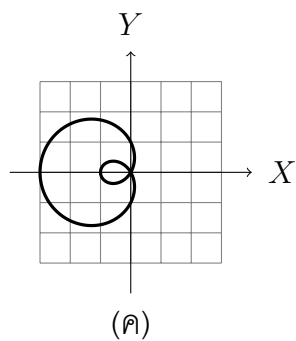
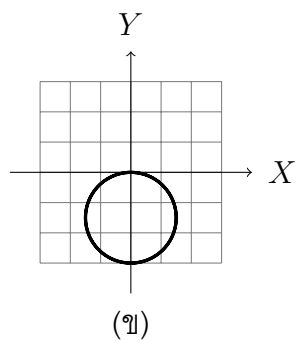
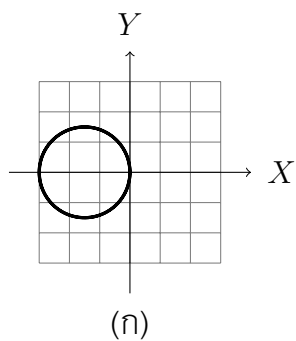
5. $r = 2\sin 5\theta$

8. $r = 3\cos 2\theta$

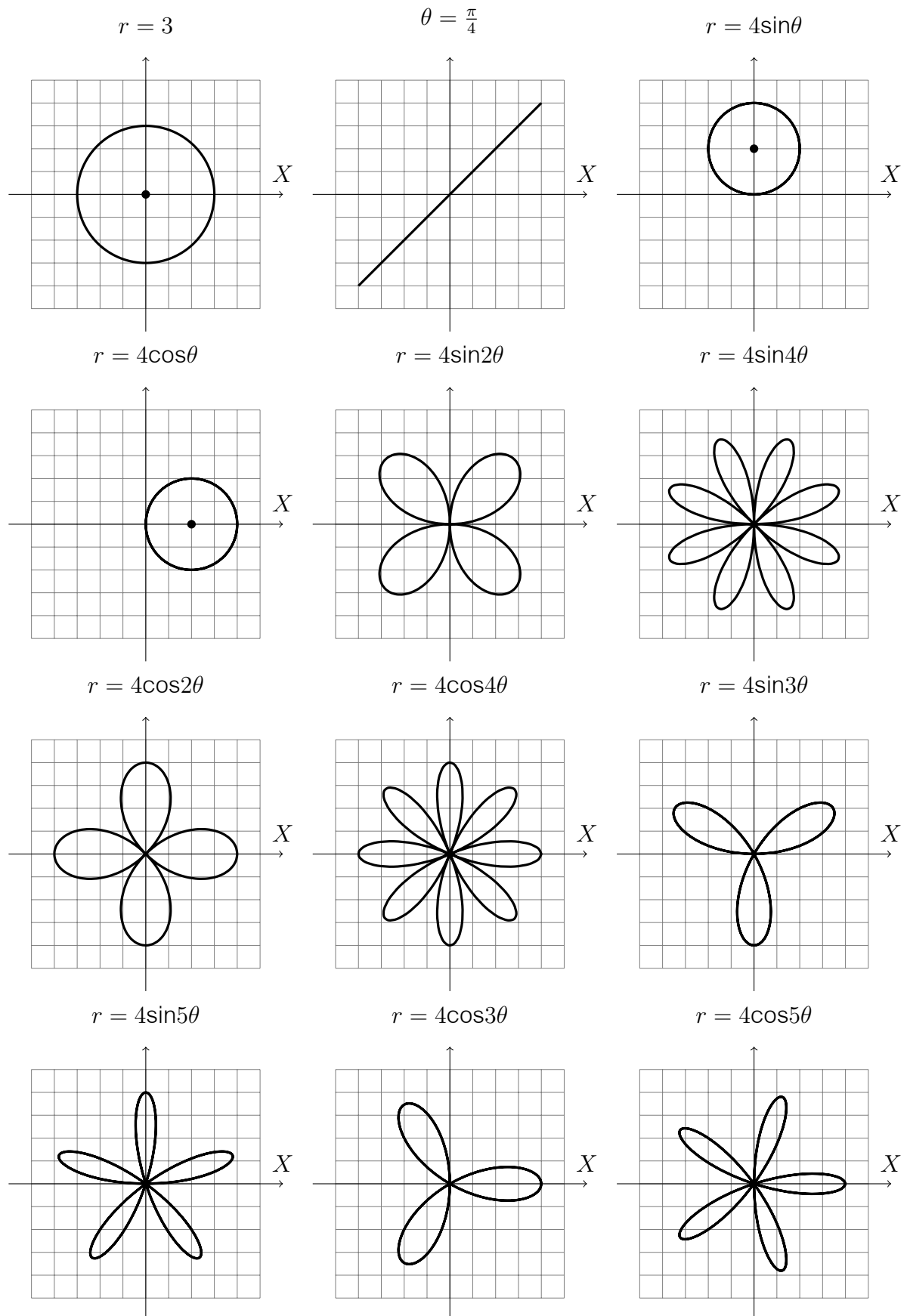
3. $r = 1 + \cos\theta$

6. $r = -3\sin\theta$

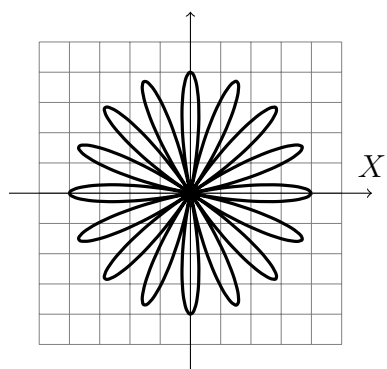
9. $\theta = \frac{3\pi}{4}$



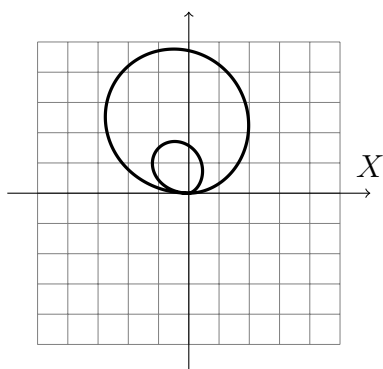
ตัวอย่างกราฟเชิงขั้ว



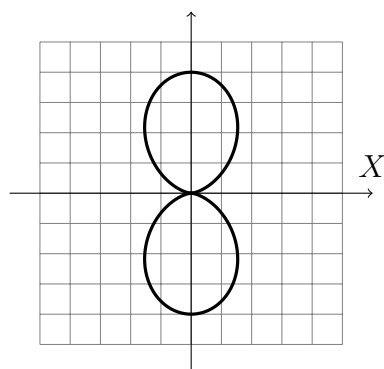
$$r = 4\cos 8\theta$$



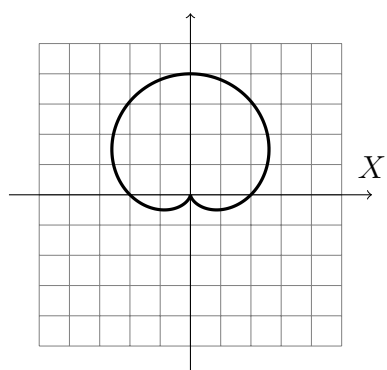
$$r = \theta \sin \theta$$



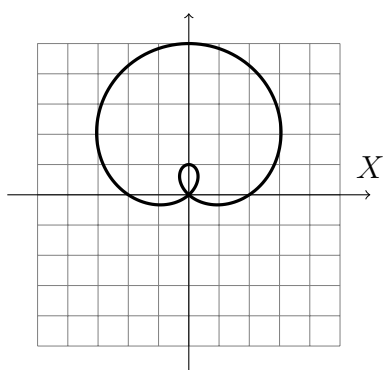
$$r = 4\sin^2 \theta$$



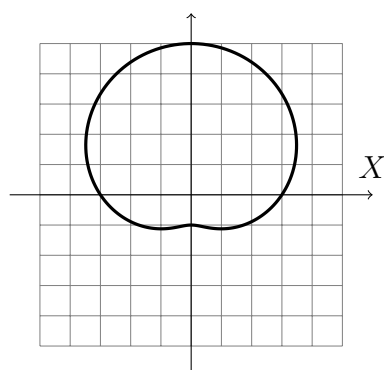
$$r = 2 + 2\sin \theta$$



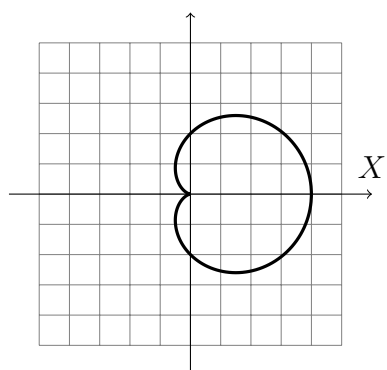
$$r = 2 + 3\sin \theta$$



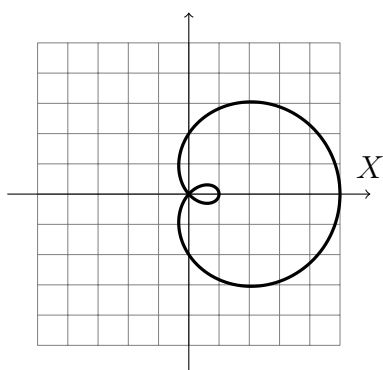
$$r = 3 + 2\sin \theta$$



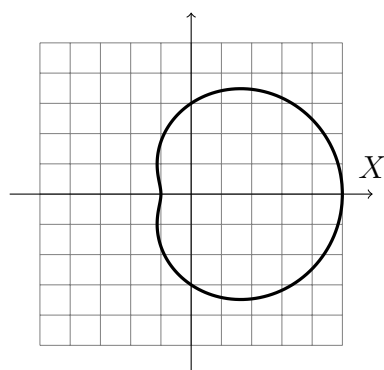
$$r = 2 + 2\cos \theta$$



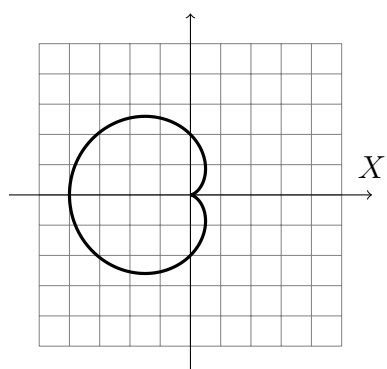
$$r = 2 + 3\cos \theta$$



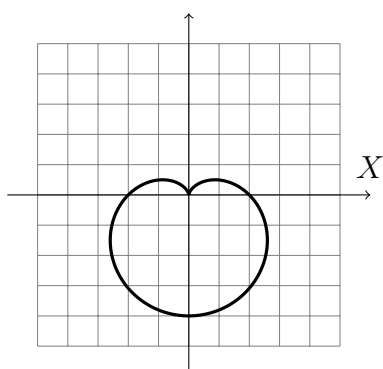
$$r = 3 + 2\cos \theta$$



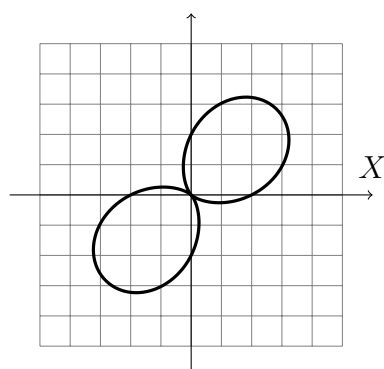
$$r = 2 - 2\cos \theta$$



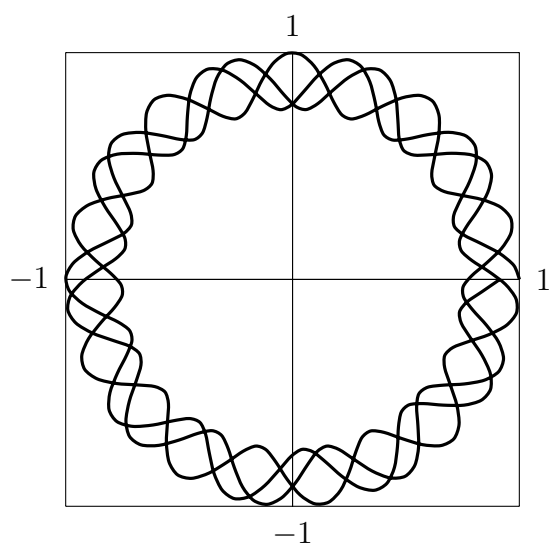
$$r = 2 - 2\sin \theta$$



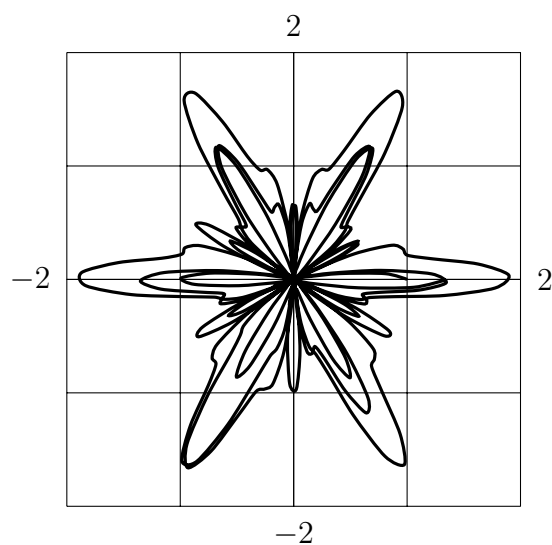
$$r = 2 + 2\sin 2\theta$$



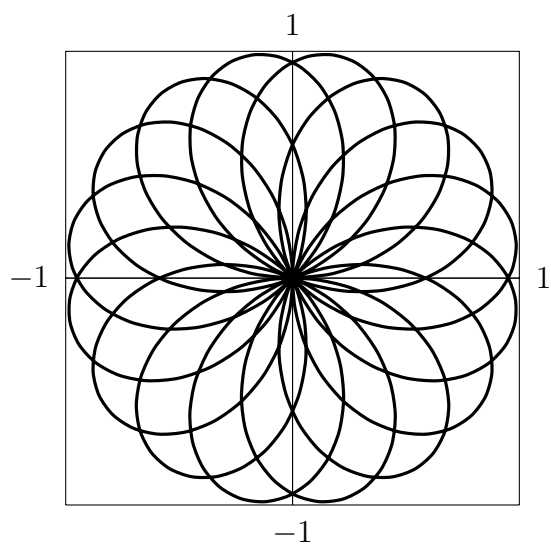
$$r = \sin^2(2.4\theta) + \cos^4(2.4\theta)$$



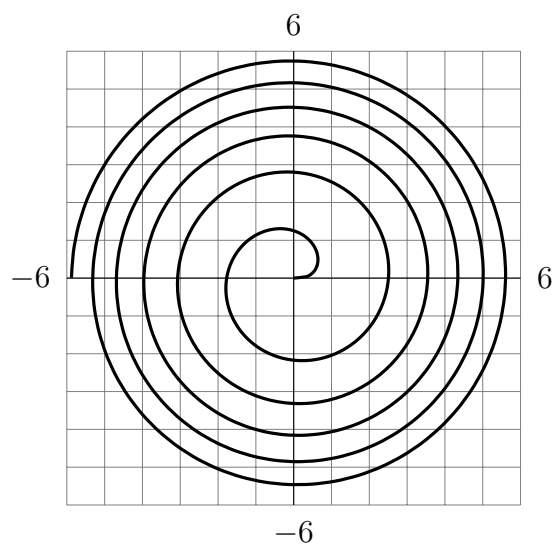
$$r = \sin^2(1.2\theta) + \cos^3(6\theta)$$



$$r = \sin\left(\frac{8}{5}\theta\right)$$



$$r = \sqrt{\theta}$$



แบบฝึกหัด 4.2

1. จงเขียนกราฟของสมการในระบบเชิงขั้วต่อไปนี้

1.1 $r = 2$

1.4 $r = 5\cos 2\theta$

1.7 $r = 5\sin 6\theta$

1.2 $2\theta = \pi$

1.5 $r = -3\sin 4\theta$

1.8 $r = 6\cos 7\theta$

1.3 $4\theta = 3\pi$

1.6 $r = 4\cos 3\theta$

1.9 $r = -4\cos 5\theta$

2. จงเขียนกราฟของสมการในระบบเชิงขั้วต่อไปนี้

2.1 $r = 1 - 3\cos \theta$

2.3 $r = 1 + \cos \theta$

2.5 $r = 3 + 3\cos \theta$

2.2 $r = 3 + 4\cos \theta$

2.4 $r = 2 - 4\sin \theta$

2.6 $r = -4 - 4\sin \theta$

3. จงยกตัวอย่างสมการที่ให้กราฟกลีบกุหลาบ 5 กลีบ มาอย่างน้อย 3 สมการ

4. จงยกตัวอย่างสมการที่ให้กราฟกลีบกุหลาบ 8 กลีบ มาอย่างน้อย 3 สมการ

5. จงจับคู่สมการในระบบเชิงขั้วในแต่ละข้อต่อไปนี้กับกราฟที่กำหนดให้

5.1 $r = 3\sin 3\theta$

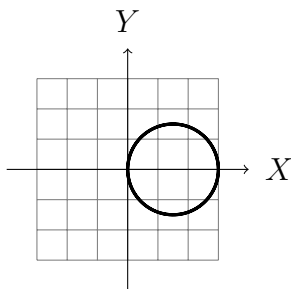
5.3 $r = 2 + 2\cos \theta$

5.5 $r = 3\cos 4\theta$

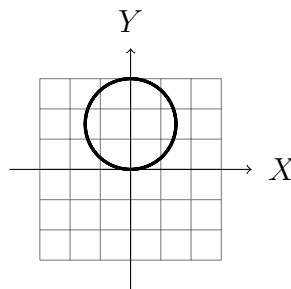
5.2 $r = 3\cos \theta$

5.4 $r = 1 - 2\sin \theta$

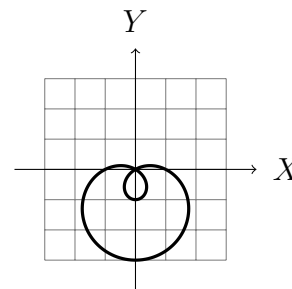
5.6 $r = 3\sin \theta$



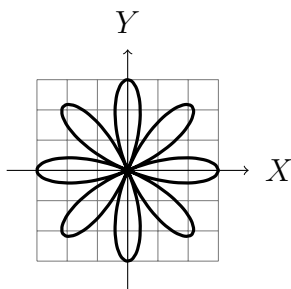
(ก)



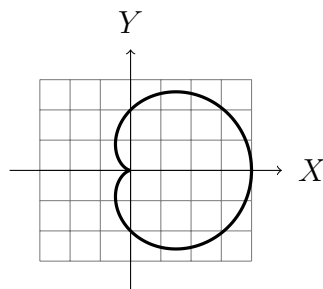
(ข)



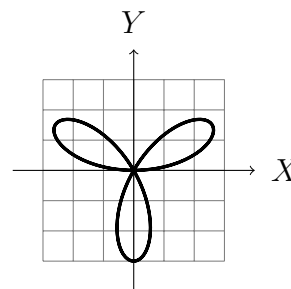
(ค)



(ง)



(จ)



(ฉ)

4.3 การหาพื้นที่ของอาณาบริเวณในระบบพิกัดเชิงขั้ว

ให้ R เป็นพื้นที่อาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยฟังก์ชัน

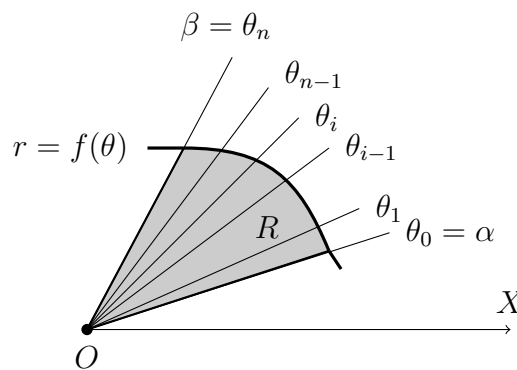
$$r = f(\theta) \text{ และเส้นตรง } \theta = \alpha \text{ และ } \theta = \beta$$

เมื่อ $r > 0$ แบ่ง $[\alpha, \beta]$ ออกเป็น n ช่วงย่อยด้วยจุด $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ โดยที่

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n = \beta$$

แสดงได้ดังรูปต่อไปนี้

รูปที่ 4.13: การแบ่งพื้นที่ย่อย ๆ ของ R ในระบบพิกัดเชิงขั้ว



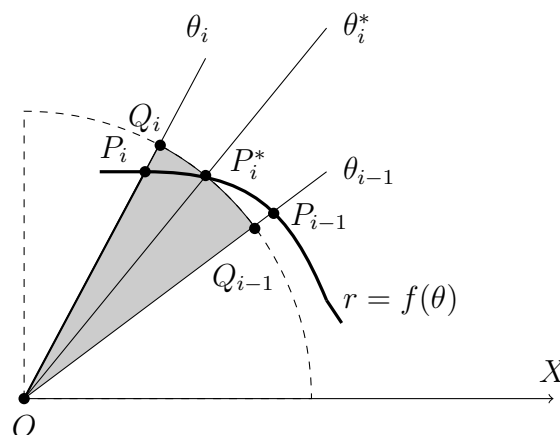
สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ให้

R_i เป็นพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $\theta = \theta_{i-1}$ และ $\theta = \theta_i$ ด้วยเส้นโค้ง $r = f(\theta)$

P_i เป็นจุด $(f(\theta_i), \theta_i)$ และ P_{i-1} เป็นจุด $(f(\theta_{i-1}), \theta_{i-1})$

ให้ $\theta_i^* \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$ และ P_i^* เป็นจุด $(f(\theta_i^*), \theta_i^*)$ แสดงดังรูป

รูปที่ 4.14: พื้นที่ของ R_i ที่ปิดล้อมด้วย $\theta = \theta_{i-1}$, $\theta = \theta_i$ และ $r = f(\theta)$



พิจารณาวงกลมรัศมี OP_i^* ตัดกับเส้นตรง $\theta = \theta_{i-1}$ ที่จุด Q_{i-1} และเส้นตรง $\theta = \theta_i$ ที่จุด Q_i และให้ $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$

$$R_i \approx \text{พื้นที่เซกเตอร์ } OQ_iQ_{i-1} = \frac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2\Delta\theta_i$$

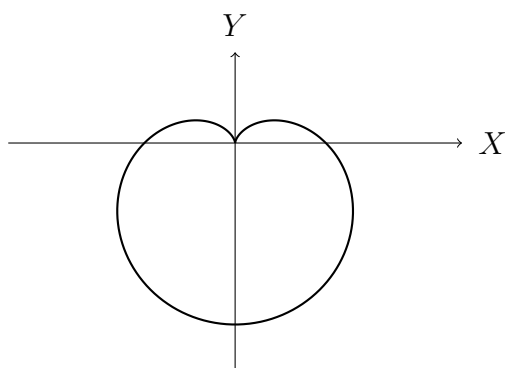
ดังนั้น

$$R = \sum_{i=1}^n R_i \approx \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta_i$$

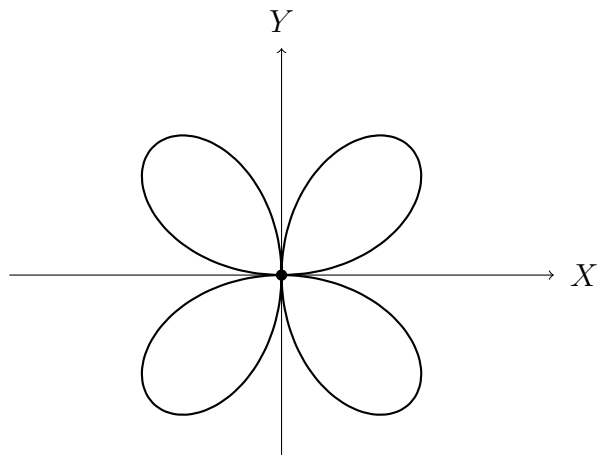
เมื่อแบ่ง n มาก ๆ และทำให้ $\Delta\theta_i$ มีค่าน้อย ๆ และ $r = f(\theta)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง โดยใช้ผลบวกของรีมันน์จะได้ว่า

$$\text{พื้นที่ } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta_i = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

ตัวอย่าง 4.3.1 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $r = 2 - 2\sin\theta$



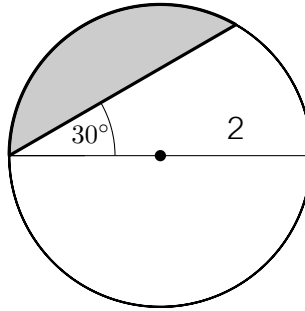
ตัวอย่าง 4.3.2 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่เปิดล้อมด้วย $r = 4\sin 2\theta$ บนช่วง $[0, \frac{\pi}{2}]$



ตัวอย่าง 4.3.3 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณภายในวงกลม

$$x^2 + y^2 - x - y = 0 \quad \text{และ} \quad x^2 + y^2 + x - y = 0$$

ตัวอย่าง 4.3.4 จงหาพื้นที่ (แรเงา) ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยคอร์ด์และส่วนของวงกลมที่มีรัศมี 2 หน่วย ดังรูปต่อไปนี้ โดย (1) ใช้ปริพันธ์ในระบบพิกัดเชิงขั้ว (2) ใช้เรขาคณิต



แบบฝึกหัด 4.3

1. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

1.1 $r = 1 + \cos\theta$

1.2 $r = 2\sin 2\theta$

1.3 $r = \sin\theta + \cos\theta$

1.4 $r = 2\cos 2\theta$

1.5 $r = 3 - 2\cos\theta$

1.6 $r = 2\sin 3\theta$

1.7 $r = 4\cos^2\theta$

1.8 $r = 4\cos 3\theta$

2. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

2.1 $r = 4 + 3\cos\theta$ บนช่วง $[0, \pi]$

2.2 $r = 8\cos 2\theta$ บนช่วง $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

2.3 $r = 12\sin 3\theta$ บนช่วง $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$

2.4 $r = 2 + 2\cos\theta$ บนช่วง $[0, 2\pi]$

2.5 $r = 3\sin\theta$ บนช่วง $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$

2.6 $r = 2 - 2\sin\theta$ บนช่วง $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

3. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่เปิดล้อมด้วย $r = 6\sin\theta$ และ $r = 2 + 2\sin\theta$ บนช่วง $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$

4. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่อยู่ภายในเส้นโค้ง $r = 4\sin\theta$ และ $r = 4\sqrt{3}\cos\theta$

5. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่อยู่ภายในเส้นโค้ง $r = 4\sin 2\theta$ และ $r = 4\cos\theta$

6. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่อยู่ภายในเส้นโค้ง $r = 2\sin 2\theta$ และภายนอกวงกลม $r = \sqrt{3}$

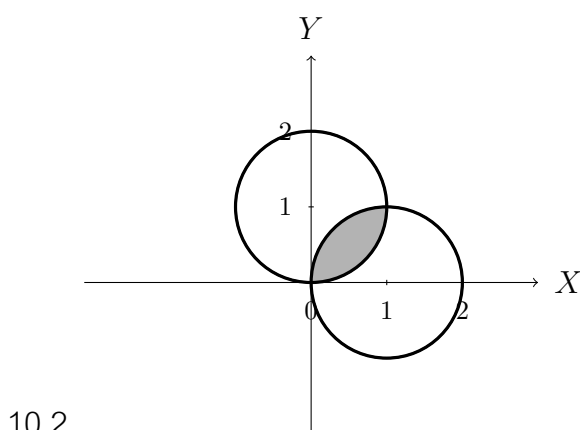
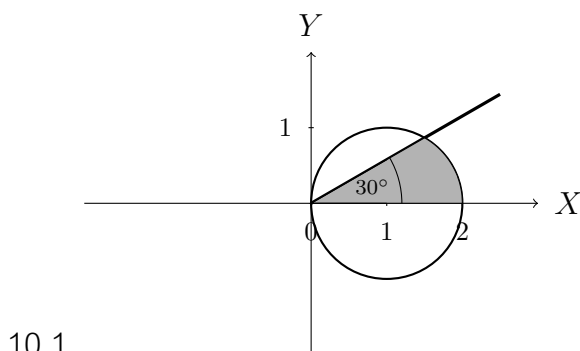
7. จงหาพื้นที่ที่อยู่ภายในวงกลม $x^2 + y^2 = 2x$ และ $x^2 + y^2 = 2y$

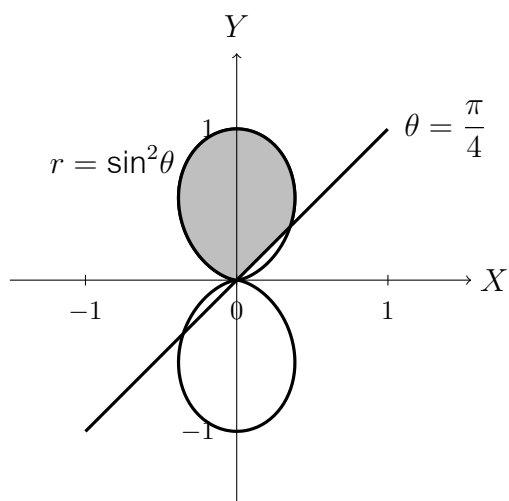
8. จงหาพื้นที่ที่อยู่ภายในวงกลม $x^2 + y^2 - 4y = 0$ เฉพาะส่วนที่ $x \geq \sqrt{3}$

9. จงหาพื้นที่ที่อยู่ภายในวงกลม $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$ เฉพาะส่วนที่ $y \geq 4$

แบบฝึกหัดบทที่ 4

1. ให้ $a > 0$ ถ้า $(a - 1, a)$ เป็นจุดในระบบพิกัดฉาก เมื่อเปลี่ยนไปอยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้วคือจุด $(-5, \theta)$ จงหาค่าของ a
2. ให้ $a < 0$ ถ้า $(a + 1, a)$ เป็นจุดในระบบพิกัดฉาก เมื่อเปลี่ยนไปอยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้วคือจุด $(-5, \theta)$ จงหาค่าของ a
3. จงเขียนสมการ $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$ ให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว
4. จงเขียนสมการ $\frac{\cos\theta}{\sin\theta + 1} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta - 1} = 1$ ให้อยู่ในระบบพิกัดฉาก
5. จงเขียนสมการ $r = \sin\theta \sin 2\theta$ ให้อยู่ในระบบพิกัดฉาก
6. จงหาจุดตัดทั้งหมดของกราฟ $r = 1 + 2\cos\theta$ และ $r = 1 - 2\sin\theta$
7. จงหาจุดตัดทั้งหมดของกราฟ $r = \sin 3\theta$ และ $r = \sin 5\theta$
8. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $r = \cos^2\theta$ บนช่วง $[0, \frac{\pi}{4}]$
9. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $r = 2 - \sin\theta$ บนช่วง $[0, \frac{\pi}{3}]$
10. จงหาพื้นที่ที่แรเงาต่อไปนี้ โดยใช้การปริพันธ์ในรูปเชิงขั้ว





10.3

11. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณภายในวงกลม $x^2 + y^2 - x - y = 0$ และ $x^2 + y^2 + x - y = 0$
12. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณอยู่ภายในเส้นโค้ง $r = 2 + \sin\theta$ และ $r = 2 + \sqrt{3}\cos\theta$
13. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณอยู่ภายในเส้นโค้ง $r = 2\sin 3\theta$ และ $r = 2\sin\theta$

บทที่ 5

ฟังก์ชันหลายตัวแปร

ปัญหาที่มักพบโดยทั่วไปมักเกี่ยวข้องกับหลายตัวแปรเช่น พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $A = wl$ เมื่อ w คือความกว้าง และ l คือความยาว กล่าวได้ว่า A ขึ้นกับตัวแปรสองตัวคือ w และ l เขียนแทนด้วย

$$A(w, l) = wl$$

ทำนองเดียวกันปริมาตรของปริซึมฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้า $V = wlh$ เมื่อ w คือความกว้าง l คือความยาว และ h คือความสูง นั่นคือ V ขึ้นกับตัวแปรสามตัวคือ w, l และ h เขียนแทนด้วย

$$V(w, l, h) = wlh$$

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงฟังก์ชันลักษณะดังกล่าวและศึกษาสมบัติและอนุพันธ์ของฟังก์ชันเหล่านี้

5.1 ฟังก์ชันค่าจริงสองตัวแปร

บทนิยาม 5.1.1 ให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ เมื่อ $D \subset \mathbb{R}^n$ เมื่อ $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ (n พจน์)
เรียก f ว่า **ฟังก์ชันค่าจริงของ n ตัวแปร** (real value function of n variables)
โดยเรียก D ว่า **โดเมน** (domain) ของฟังก์ชัน

สำหรับฟังก์ชันที่ไม่ระบุโดเมนให้ถือว่าเป็นโดเมนใหญ่สุดที่เป็นสับเซตของ $\mathbb{R}^n$ และในหัวข้อนี้เราจะศึกษาในกรณี $n = 2$ โดยเรียกฟังก์ชัน f ว่า **ฟังก์ชันค่าจริงสองตัวแปร** (real value function of two variables) เขียนแทนด้วย $z = f(x, y)$

ตัวอย่าง 5.1.2 กำหนดให้ $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$

1. จงหา k ซึ่งทำให้ $f(0, k) + f(k, 0) = f(0, 0)$
2. จงหาโดเมนและเขียนกราฟแสดงโดเมน

ตัวอย่าง 5.1.3 จงหาโดเมนและเขียนกราฟแสดงโดเมนของฟังก์ชัน

1. $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y - 1}}$

2. $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$

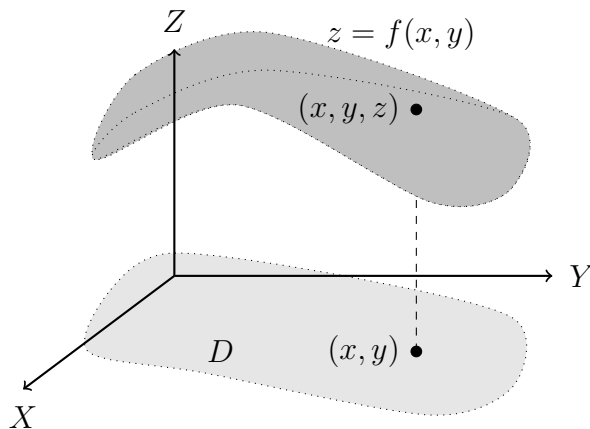
กราฟของฟังก์ชันสองตัวแปร

สำหรับ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ เมื่อ $D \subset \mathbb{R}^2$ กราฟของ f คือ

$$S = \{(x, y, z) : z = f(x, y) \text{ เมื่อ } (x, y) \in D\}$$

เมื่อลงจุด (x, y, z) สำหรับทุกจุด $(x, y) \in D$ จะได้กราฟของในลักษณะพื้นผิว หรืออาจเรียก S ว่า **พื้นผิว (surface)** ของ $z = f(x, y)$

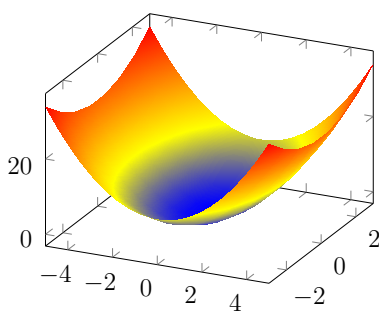
รูปที่ 5.1: แสดงความสัมพันธ์พื้นผิวกับโดเมน



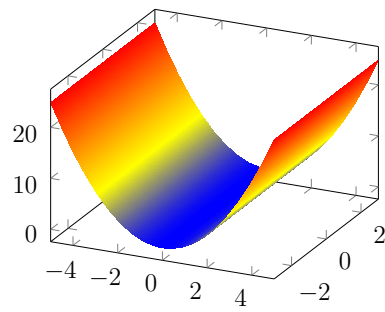
ต่อไปเป็นกราฟตัวอย่างของพื้นผิว

รูปที่ 5.2: ตัวอย่างกราฟพื้นผิว

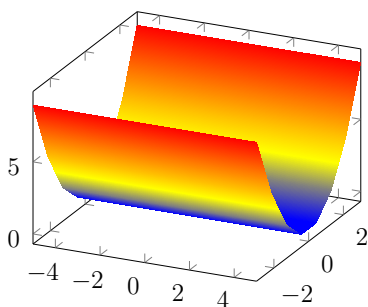
1. $z = x^2 + y^2$



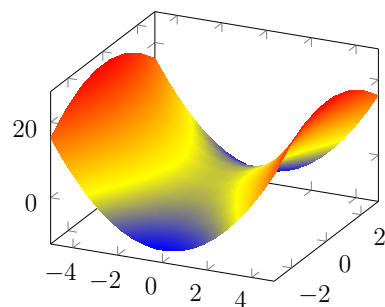
3. $z = x^2$



2. $z = y^2$



4. $z = x^2 - y^2$



แบบฝึกหัด 5.1

1. จงหาค่าของฟังก์ชันที่จุดต่อไปนี้

$$1.1 \quad f(x, y) = x + \sqrt{y} \quad \text{ที่จุด } (0, 1)$$

$$1.2 \quad f(x, y) = x + y + xy \quad \text{ที่จุด } (1, 2)$$

$$1.3 \quad f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{ที่จุด } (1, -2, 2)$$

$$1.4 \quad f(x, y, z) = x^2y^2 - x^4 + 4zx^2 \quad \text{ที่จุด } (a + b, a - b, ab)$$

2. กำหนดให้ $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ จงหา a ที่ทำให้ $f(0, a) + f(a, 0) = f(3, 4)$

3. จงหาโดเมนของ f พร้อมเขียนกราฟแสดงโดเมน

$$3.1 \quad f(x, y) = \ln(1 - x^2 + y^2)$$

$$3.2 \quad f(x, y) = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$$

$$3.3 \quad f(x, y) = \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{y}$$

$$3.4 \quad f(x, y) = \frac{1}{y - x^2}$$

$$3.5 \quad f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

$$3.6 \quad f(x, y) = \sqrt{1 - x} + \ln y$$

4. จงหาโดเมนพร้อมร่างกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$4.1 \quad f(x, y) = x - 2y$$

$$4.2 \quad f(x, y) = 3 - x^2$$

$$4.3 \quad f(x, y) = 1 + y^2$$

$$4.4 \quad f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$$

$$4.5 \quad f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$$

$$4.6 \quad f(x, y) = 1 - x^2 - 9y^2$$

$$4.7 \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$4.8 \quad f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 + y^2}$$

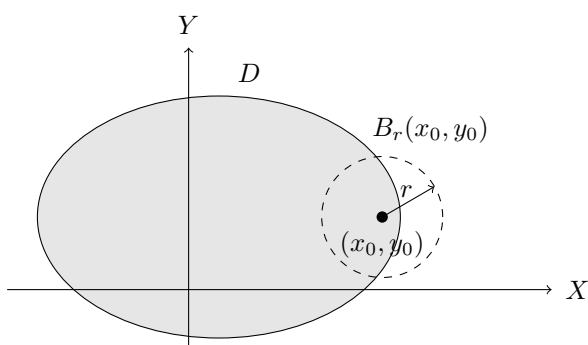
5.2 ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันสองตัวแปร

บทนิยาม 5.2.1 ให้ $D \subset \mathbb{R}^2$ เราจะกล่าวว่า $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ เป็น **จุดลิมิต** (limit point) ใน D ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ $r > 0$

$$(B_r(x_0, y_0) - \{(x_0, y_0)\}) \cap D \neq \emptyset$$

เมื่อ $B_r(x_0, y_0) = \{(x, y) : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}$ เรียกว่า **แผ่นกลมเปิด** (open ball) ที่มีศูนย์กลางที่ (x_0, y_0) รัศมี r แสดงดังรูป

รูปที่ 5.3: แสดงจุดลิมิต (x_0, y_0) ของ D



บทนิยาม 5.2.2 ให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ เมื่อ $D \subset \mathbb{R}^2$ และให้ (x_0, y_0) เป็นจุดลิมิตของ D เราจะกล่าวว่า $f(x, y)$ มีลิมิตเป็น L เมื่อ (x, y) เข้าใกล้ (x_0, y_0) เขียนแทนด้วย

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$ มีจำนวนจริงบวก $\delta > 0$ ที่ทำให้

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon \quad \text{ทุก ๆ } (x, y) \in D \text{ ซึ่ง } 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

ตัวอย่าง 5.2.3 จงหาแสดงว่า $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$

ทฤษฎีบท 5.2.4 ให้ (x_0, y_0) เป็นจุดลิมิตของ $\mathbb{R}^2$ และให้ c เป็นจำนวนจริง แล้ว

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} c = c$
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} x = x_0$
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} y = y_0$

การหาลิมิตโดยใช้บทนิยามอาจทำได้โดยยาก เราจึงมักจะใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตซึ่งคล้ายคลึงกับลิมิตของฟังก์ชันตัวแปรเดียวดังทฤษฎีบทต่อไปนี้ แต่ข้อละการพิสูจน์ไว้หรือผู้อ่านอาจพิสูจน์ได้ด้วยตนเอง

ทฤษฎีบท 5.2.5 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจาก D ไป $\mathbb{R}$ และ (x_0, y_0) เป็นจุดลิมิตของ D และให้ L, M เป็นจำนวนจริง ถ้า $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$ และ $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x, y) = M$ แล้ว

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [f(x, y) + g(x, y)] = L + M$
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)g(x, y) = LM$
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{L}{M}$ เมื่อ $M \neq 0$
4. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} |f(x, y)| = |L|$
5. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \sqrt[n]{f(x, y)} = \sqrt[n]{L}$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และ $\sqrt[n]{L}$ เป็นจำนวนจริง

ตัวอย่าง 5.2.6 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} (x^2y - y - 4x + 1)$
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,-5)} x\sqrt{x^2 - y}$
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,-1)} |x + y - 1|$
4. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{x + y}{x - y}$

สำหรับ $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ อยู่ในรูป ซึ่งเรียกว่ารูปแบบไม่กำหนด $I.F. \frac{0}{0}$ เราอาจจะใช้วิธีเช่นเดียวกับลิมิตของฟังก์ชันตัวแปรเดียว

ตัวอย่าง 5.2.7 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

$$1. \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2}$$

$$2. \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + 3xy + 2y^2}$$

$$3. \lim_{(x,y) \rightarrow (-1,3)} \frac{x^2y + y^2 - 3x^2 - 3y}{xy - 3x - y + 3}$$

ทฤษฎีบท 5.2.8 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจาก D ไป $\mathbb{R}$ และ (x_0, y_0) เป็นจุดลิมิตของ D ถ้า

1. มีจำนวนจริงบวก M และ δ_0 ซึ่ง

$$|f(x, y)| < M \quad \text{ทุก } (x, y) \in D \text{ ซึ่ง } 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_0$$

2. $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x, y) = 0$

จะได้ว่า

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)g(x, y) = 0$$

ตัวอย่าง 5.2.9 จงใช้โดยทฤษฎีบท 5.2.8 แสดงว่า

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{2x^2y^3}{x^2 + y^2} = 0$$

ตัวอย่าง 5.2.10 จงหาลิมิตของ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^4}{x^4 + y^4}$

ตัวอย่าง 5.2.11 จงหาลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

ทฤษฎีบท 5.2.12 (ทฤษฎีบทการบีบ (The Squeeze Theorem))

ให้ $f, g, h : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ และ $D \subseteq \mathbb{R}^2$ สมมติว่า (x_0, y_0) เป็นจุดลิมิตของ D และ $r > 0$ โดยที่

$$f(x, y) \leq g(x, y) \leq h(x, y) \quad \text{ทุก } (x, y) \in D \text{ ซึ่ง } 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$$

ถ้า $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} h(x, y)$ จะได้ว่า

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x, y) = L$$

ตัวอย่าง 5.2.13 ให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ และ $D \subseteq \mathbb{R}^2$ สมมติว่า (x_0, y_0) เป็นจุดลิมิตของ D และ

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} |f(x, y)| = 0$$

จงพิสูจน์ว่า $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = 0$

ตัวอย่าง 5.2.14 จงแสดงว่า $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$

ลิมิตตามเส้นโค้ง

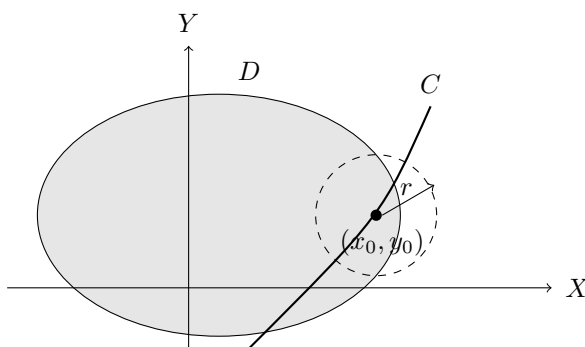
บทนิยาม 5.2.15 ให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ เมื่อ $D \subset \mathbb{R}^2$ และให้ (x_0, y_0) เป็นจุดลิมิตของ D ให้ C เป็นเส้นโค้งใน $\mathbb{R}^2$ ที่ผ่านจุด (x_0, y_0) เราจะกล่าวว่า $f(x, y)$ มีลิมิตเป็น L เมื่อ (x, y) เข้าใกล้ (x_0, y_0) ตามเส้นโค้ง C เขียนแทนด้วย

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ \text{บน } C}} f(x, y) = L$$

ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$ มีจำนวนจริงบวก $\delta > 0$ ที่ทำให้

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon \quad \text{ทุก ๆ } (x, y) \in C \cap D \text{ ซึ่ง } 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

รูปที่ 5.4: เส้นโค้ง C ใน $\mathbb{R}^2$ ที่ผ่านจุดลิมิต (x_0, y_0) ของ D



จากบทนิยามดังกล่าวทำให้ได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะใช้เพื่อแสดงว่าลิมิตไม่มีค่าโดยอาศัยการหาลิมิตตามเส้นโค้ง ซึ่งบทพิสูจน์จะขอละไว้ในวิชานี้

ทฤษฎีบท 5.2.16 ให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ และ (x_0, y_0) เป็นจุดลิมิตของ D จะได้ว่า

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L \quad \text{ก็ต่อเมื่อ}$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ \text{บน } C}} f(x, y) = L \quad \text{ทุก ๆ เส้นโค้ง } C \text{ ใน } \mathbb{R}^2 \text{ ที่ผ่านจุด } (x_0, y_0)$$

ตัวอย่าง 5.2.17 จงแสดงว่า $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$ ไม่มีค่า

ตัวอย่าง 5.2.18 จงแสดงว่า $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^3}{x^2 + y^4}$ ไม่มีค่า

ความต่อเนื่อง

บทนิยาม 5.2.19 ให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ และ $(x_0, y_0) \in D$ จะกล่าวว่า f **ต่อเนื่องที่จุด** (x_0, y_0) ก็ต่อเมื่อ

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ มีค่า
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$

และกล่าวว่า f ต่อเนื่องบนเซต $S \subset D$ ก็ต่อเมื่อ f ต่อเนื่องทุกจุดในเซต S

ตัวอย่าง 5.2.20 กำหนดให้ $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{เมื่อ } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{เมื่อ } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

แล้ว f ต่อเนื่องที่จุด $(0, 0)$ หรือไม่

ตัวอย่าง 5.2.21 กำหนดให้ $f(x, y) = \frac{xy}{x + y}$ แล้ว f ต่อเนื่องบนโดเมน f หรือไม่

แบบฝึกหัด 5.2

1. จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1.1 $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (xy + x^2)$

1.2 $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x^2 - y^2}{x^4 - y^4}$

1.3 $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 - y^2}{x^2y - xy^2}$

1.4 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y}{x^2 + y^2}$

1.5 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^4 + y^4}$

1.6 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^4 + y^6}$

1.7 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3y^4}{x^6 + y^6}$

1.8 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2}$

1.9 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4y^4}{(x^2 + y^4)^3}$

1.10 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2x - y^2}{xy - y}$

1.11 $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} \frac{xy - 2x}{xy - 6 - 2x + 3y}$

1.12 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^4}{x^4 + x^2y^2 + y^4}$

1.13 $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}}{y}$

1.14 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2x}{x^2 + |xy| + y^2}$

1.15 $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^3 + 3xy - x^2y - 3y^2}{x^4 + xy^2 - x^3y - y^3}$

1.16 $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x^3 - 8y^3}{x^2 - xy - 2y^2}$

2. จงพิจารณาว่า f ต่อเนื่องบนจุดที่กำหนดให้หรือไม่

2.1 $f(x, y) = \frac{x^3y^2}{1 - xy}$ ที่จุด $(1, 1)$

2.2 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x - y} & \text{เมื่อ } (x, y) \neq (1, 1) \\ 1 & \text{เมื่อ } (x, y) = (1, 1) \end{cases}$ ที่จุด $(1, 1)$

2.3 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{เมื่อ } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{เมื่อ } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ ที่จุด $(0, 0)$

3. กำหนดให้ $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} & \text{เมื่อ } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{เมื่อ } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

แล้ว f ต่อเนื่องบนโดเมน f หรือไม่4. จงพิจารณาว่า f มีความต่อเนื่องที่จุดใดบ้าง

4.1 $f(x, y) = \sqrt{y - x}$

4.2 $f(x, y) = \frac{x^2 + 4y^2}{x^2 - 4y^2}$

4.3 $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + y^2 - 4}}$

4.4 $f(x, y) = e^{xy} \cos(xy^2 + 1)$

4.5 $f(x, y) = 5x^2y \ln|1 - x^2 - y^2|$

4.6 $f(x, y) = \arcsin(xy)$

5.3 อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันสองตัวแปร

บทนิยาม 5.3.1 ให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ เมื่อ $D \subseteq \mathbb{R}^2$ โดยที่ $z = f(x, y)$ และ $(x_0, y_0) \in D$

อนุพันธ์ย่อย (partial derivatives) ของ f เทียบกับ x ที่จุด (x_0, y_0) คือ

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \quad \text{ถ้าลิมิตมีค่า}$$

อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ y ที่จุด (a, b) คือ

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} \quad \text{ถ้าลิมิตมีค่า}$$

ดังนั้นอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน f คือ f_x และ f_y

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} \quad \text{และ} \quad f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

สัญลักษณ์ที่นิยมใช้แทนอนุพันธ์ย่อย

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= f_x = f_1 = D_1 f = D_x f = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} \\ f_y(x, y) &= f_y = f_2 = D_2 f = D_y f = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.3.2 กำหนดให้ $f(x, y) = x^2 y$ จงหาค่าของ $f_x(1, 0)$ และ $f_y(1, 0)$ โดยใช้บทนิยาม

ตัวอย่าง 5.3.3 ให้ $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{เมื่อ } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{เมื่อ } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
 จงหาค่าของ $f_x(0, 0)$ และ $f_y(0, 0)$

ตัวอย่าง 5.3.4 กำหนดให้ $f(x, y) = xy + x^2$ จงหาค่าของ $f_x(x, y)$ และ $f_y(x, y)$ โดยใช้บทนิยาม

จากบทนิยามและตัวอย่างข้างต้น จะเห็นว่าการหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันสองตัวแปรเมื่อเทียบกับตัวแปร x จะเป็นมีเปลี่ยนแปลงเพียงตัวแปรเดียวนั้นคือไม่ขึ้นกับ y ถ้าอนุพันธ์ย่อยเมื่อเทียบกับตัวแปร y จะเป็นมีเปลี่ยนแปลงเพียงตัวแปรเดียวนั้นคือไม่ขึ้นกับ x ดังนั้นเราสามารถนำสูตรต่าง ๆ ในฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรมาใช้ได้

ตัวอย่าง 5.3.5 จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน $f(x, y) = \frac{2x + y^2}{x + y}$

ตัวอย่าง 5.3.6 จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน $f(x, y) = e^{x^2y} \sin^2(5y)$

ตัวอย่าง 5.3.7 กำหนดให้ $f(x, y) = yx + x^2 + y^2 + 2x + 7y$ จงหา (x, y) ที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

ตัวอย่าง 5.3.8 กำหนดให้ $u(x, t) = \cos x \sin t$ จงหา (x, t) ที่ทำให้ $u_x + u_t = 0$

การหาอนุพันธ์ได้

บทนิยาม 5.3.9 ให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ และ $D \subseteq \mathbb{R}^2$ เรากล่าวว่า f **หาอนุพันธ์ได้** (differentiable) ที่จุด (x_0, y_0) ถ้าทุก ๆ $(x, y) \in B_\delta(x_0, y_0) - \{(x_0, y_0)\}$ สำหรับบาง $\delta > 0$ ซึ่ง

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + E(x, y)$$

โดยที่

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{E(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

และ f หาอนุพันธ์ได้บน $S \subseteq D$ ก็ต่อเมื่อ f หาอนุพันธ์ได้ทุกจุดใน S

ทฤษฎีบท 5.3.10 ให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ เมื่อ $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0) แล้ว

$$f \text{ ต่อเนื่องที่จุด } (x_0, y_0)$$

ทฤษฎีบท 5.3.11 ให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ เมื่อ $D \subseteq \mathbb{R}^2$ และ $(x_0, y_0) \in D$ ถ้า f มีอนุพันธ์ย่อยบน $B_r(x_0, y_0) \subseteq D$ สำหรับบาง $r > 0$ แล้ว f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0)

ตัวอย่าง 5.3.12 จงแสดงว่า $f(x, y) = xy^2 + x^2y + x + y$ มีความต่อเนื่องบน $\mathbb{R}^2$

แบบฝึกหัด 5.3

1. จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$1.1 \quad f(x, y) = 3xy - 5x^4y^4$$

$$1.2 \quad f(x, y) = \sqrt[3]{1 - \sin^2(xy)}$$

$$1.3 \quad f(x, y) = \ln(\cos\sqrt{x+y})$$

$$1.4 \quad f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

$$1.5 \quad f(x, y) = y^2 + x^2 \tan(xy)$$

$$1.6 \quad f(x, y) = 5e^{x^2y^2} + e^x \sin(x+y^2)$$

$$1.7 \quad f(x, y) = e^x(\cos xy + \sin xy)$$

$$1.8 \quad f(x, y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$$

2. กำหนดให้ $f(x, y) = x^2ye^{xy}$ จงหาค่าของ $D_1f(1, 1)$ และ $D_2f(1, 1)$

3. กำหนดให้ $f(x, y) = (x^2 + y^2)\sqrt{x^2 - y^2}$ จงหาค่าของ $f_1(2, 1)$ และ $f_2(2, 1)$

4. กำหนดให้ $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}e^{\sin(x^2y)}$ จงหาค่าของ $f_x(1, 0)$

5. กำหนดให้ $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ จงหาค่าของ $f_x(0, 0)$

6. กำหนดให้ $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{เมื่อ } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{เมื่อ } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
 จงหาค่าของ $f_x(0, 0)$ และ $f_y(0, 0)$

7. กำหนดให้ $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2 + 4y^2} & \text{เมื่อ } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{เมื่อ } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
 จงหาค่าของ $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ และ $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$

8. กำหนดให้ $f(x, y) = 2yx + x^2 + y^2 + 2x + 10y$ จงหา (x, y) ที่สอดคล้องเงื่อนไข $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ และ $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

9. จงแสดงว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่จุดที่กำหนด

$$9.1 \quad f(x, y) = x^2 + y \quad \text{ที่จุด } (0, 1)$$

$$9.2 \quad f(x, y) = xy^2 \quad \text{ที่จุด } (1, 0)$$

$$9.3 \quad f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{ที่จุด } (1, 1)$$

$$9.4 \quad f(x, y) = 2x^2 - 4y \quad \text{ที่จุด } (2, -3)$$

5.4 กฎลูกโซ่สำหรับฟังก์ชันหลายตัวแปร

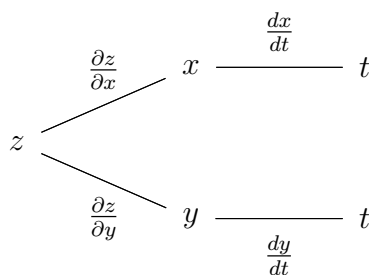
ทฤษฎีบท 5.4.1 (กฎลูกโซ่สำหรับหนึ่งตัวแปร (Chain rule for one independent variable))

ถ้า $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่หาอนุพันธ์ได้ และ $x = x(t), y = y(t)$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรหาอนุพันธ์ได้ จะได้ว่า $z = f(x(t), y(t))$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรหาอนุพันธ์ได้ และ

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

อาจแสดงกฎลูกโซ่ด้วยแผนภาพต้นไม้ดังรูปต่อไปนี้

รูปที่ 5.5: แผนภาพต้นไม้ของกฎลูกโซ่สำหรับหนึ่งตัวแปร



ตัวอย่าง 5.4.2 กำหนดให้

$$z = f(x, y) = 2x^2 + 3y^2, \quad x = x(t) = \cos t \quad \text{และ} \quad y = y(t) = \sin t$$

จงหา $\frac{dz}{dt}$

ตัวอย่าง 5.4.3 กำหนดให้

$$z = f(x, y) = \ln(2x^2 + xy), \quad x = x(t) = \sqrt{t} \quad \text{และ} \quad y = y(t) = 3t - 1$$

จงหา $\frac{dz}{dt}$ เมื่อ $t = 1$

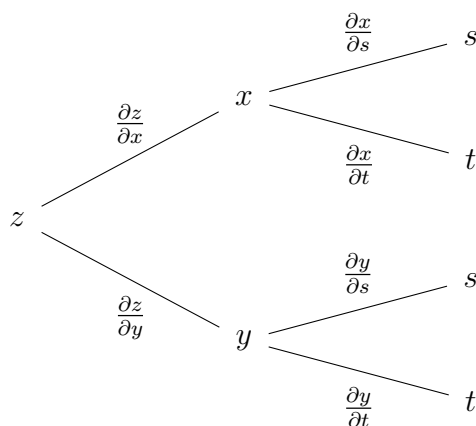
ทฤษฎีบท 5.4.4 (กฎลูกโซ่สำหรับสองตัวแปร (Chain rule for two independent variables))

ถ้า $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่หาอนุพันธ์ได้ และ $x = x(s, t), y = y(s, t)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรหาอนุพันธ์ได้ จะได้ว่า $z = f(x(s, t), y(s, t))$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรหาอนุพันธ์ได้ และ

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

อาจแสดงกฎลูกโซ่ด้วยแผนภาพต้นไม้ดังรูปต่อไปนี้

รูปที่ 5.6: แผนภาพต้นไม้ของกฎลูกโซ่สำหรับสองตัวแปร

**ตัวอย่าง 5.4.5 กำหนดให้**

$$z = f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2, \quad x = x(s, t) = 3s + 2t \quad \text{และ} \quad y = y(s, t) = 4s - t$$

จงหา $\frac{\partial z}{\partial s}$ และ $\frac{\partial z}{\partial t}$

ตัวอย่าง 5.4.6 กำหนดให้

$$u = f(x, y) = s^2 - t^2, \quad s = s(x, y) = x + y \ln x \quad \text{และ} \quad t = t(x, y) = y + x \ln y$$

จงหา $\frac{\partial u}{\partial x}$ และ $\frac{\partial u}{\partial y}$ เมื่อ $(x, y) = (1, 1)$

ตัวอย่าง 5.4.7 กำหนดให้ $z = f(u - v, v - u)$ จงแสดงว่า $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = 0$

แบบฝึกหัด 5.4

1. จงหาอนุพันธ์ต่อไปนี้

1.1 $\frac{dz}{dt}$ เมื่อ $z = x^2e^y$, $x = 2\sin t$ และ $y = t^4$

1.2 $\frac{dz}{dt}$ เมื่อ $z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, $x = \ln t$ และ $y = \cos t^2$

1.3 $\frac{dz}{dt}$ เมื่อ $z = x^2y^3 + x\sin y + tx$, $x = t + \frac{1}{t}$ และ $y = \sqrt{t}$

1.4 $\frac{\partial z}{\partial s}$ และ $\frac{\partial z}{\partial t}$ เมื่อ $z = 3x^2 + xy + 2y^2 + 3x - y$, $x = 2s - 3t$ และ $y = st + s^2$

1.5 $\frac{\partial z}{\partial t}$ และ $\frac{\partial z}{\partial r}$ เมื่อ $z = e^{\frac{y}{x}}$, $x = r\cos^2 t$ และ $y = r^2\sin t$

1.6 $\frac{\partial z}{\partial r}$ และ $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ เมื่อ $z = xye^{xy}$, $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$

2. กำหนดให้ $z = f(x, y) = 3x^4 - 2x^2y + y$, $x = x(s, t) = s^2 + t^2$ และ $y = y(s, t) = st$
 จงหา $\frac{\partial z}{\partial s}$ และ $\frac{\partial z}{\partial t}$

3. กำหนดให้ $z = \sqrt{5 + x - 2xy^4}$ เมื่อ $x = t^2$ และ $y = t - 1$
 จงหา $\frac{dz}{dt}$ เมื่อ $t = 1$

4. กำหนดให้ $z = xye^{xy}$ เมื่อ $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$
 จงหา $\frac{\partial z}{\partial r}$ และ $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ เมื่อ $(x, y) = (1, \frac{\pi}{2})$

5. กำหนดให้ $z = f(x^2 - y^2)$ จงแสดงว่า $x\frac{\partial z}{\partial y} + y\frac{\partial z}{\partial x} = 0$

6. ให้ $u = f(x, y)$ เมื่อ $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$ จงแสดงว่า

6.1 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\sin\theta}{r}$

6.2 $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \sin\theta + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\cos\theta}{r}$

7. จากบทพิสูจน์ของกฎลูกโซ่สำหรับหนึ่งตัวแปร จงพิสูจน์ว่า

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{E(x(t), y(t))}{t - t_0} = 0$$

5.5 อนุพันธ์อันดับสูง

บทนิยาม 5.5.1 ให้ $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร จะเรียก $\frac{\partial f}{\partial x}$ และ $\frac{\partial f}{\partial y}$

ว่าอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่ง (first-order partial derivative) และนิยามอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง (second-order partial derivative) ดังนี้

1. $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})$ เขียนแทนด้วย $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, f_{xx} , f_{11} หรือ $D_{11}f$
2. $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$ เขียนแทนด้วย $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, f_{xy} , f_{12} หรือ $D_{12}f$
3. $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$ เขียนแทนด้วย $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, f_{yx} , f_{21} หรือ $D_{21}f$
4. $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})$ เขียนแทนด้วย $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, f_{yy} , f_{22} หรือ $D_{22}f$

อนุพันธ์ย่อยอันดับอื่น ๆ นิยามทำนองเดียวกัน

ตัวอย่าง 5.5.2 จงหาอนุพันธ์อันดับสองของ $f(x, y) = ye^{xy} + xy^2$

ตัวอย่าง 5.5.3 กำหนดให้ $f(x, y) = x \sin(xy)$ จงหา f_{yxx}

ตัวอย่าง 5.5.4 กำหนดให้ $u = ye^{-x} + \sin(2x + 3y)$ จงหา $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}(0, 0)$

ตัวอย่าง 5.5.5 จงแสดงว่า $u(x, t) = e^{-k\omega^2 t} \cos(\omega x)$ เป็นผลเฉลยของสมการความร้อน

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

เมื่อ k, ω เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่าง 5.5.6 กำหนดให้

$$z = f(x, y), \quad x = x(r, \theta) = r \cos \theta \quad \text{และ} \quad y = y(r, \theta) = r \sin \theta$$

จงหา $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}$ และ $\frac{\partial^2 z}{\partial \theta \partial r}$

ทฤษฎีบท 5.5.7 (ทฤษฎีบทไคลร์อท (Clairaut's Theorem))

ให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร และ $(x_0, y_0) \in D$ ถ้า f มีอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง โดยที่ f_{xy} และ f_{yx} ต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0) แล้ว

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

ตัวอย่าง 5.5.8 ให้ $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{เมื่อ } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{เมื่อ } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
จงหาค่าของ $f_{xy}(0, 0)$ และ $f_{yx}(0, 0)$

แบบฝึกหัด 5.5

1. จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของแต่ละข้อต่อไปนี้
 - 1.1 $f(x, y) = x^2 - 2xy^3 + 5y^6 + 3$
 - 1.2 $f(x, y) = \ln(x^2 - 5y)$
 - 1.3 $f(x, y) = xe^y + ye^x$
 - 1.4 $f(x, y) = \sin(\cos(2x + 3y))$
 - 1.5 $f(x, y) = e^{xy} + y\sqrt{x}$
 - 1.6 $f(x, y) = \sin(3x - 2y) + \cos(2x - 3y)$
2. กำหนดให้ $f(x, y) = x^3y^5 - 2x^2y + x$ จงหา $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$ และ $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$
3. กำหนดให้ $f(x, y) = (2x + y)^5$ จงหา $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ และ $\frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x^2}$
4. กำหนดให้ $f(x, y) = x^3e^{-5y}$ จงหา $f_{xyy}(0, 1)$, $f_{xxx}(0, 1)$ และ $f_{yyxx}(0, 1)$
5. ให้ $u = 3xy - 4y^2$, $x = 2se^r$ และ $y = re^{-s}$ จงหา $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$
6. ให้ $f(x, y, z) = 2z^3 - 3(x^2 + y^2)z$ จงแสดงว่า $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$
7. ให้ $z = \ln(a^2x^2 + b^2y^2)$ จงแสดงว่า $b^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$
8. ให้ $u = xe^y + ye^x$ จงแสดงว่า $u_{yx} = u_{yxx} + u_{xyy}$
9. จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันข้อใดต่อไปนี้สอดคล้องเงื่อนไข $u_{xx} + u_{yy} = 0$
 - 9.1 $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$
 - 9.2 $u(x, y) = ye^{-xy} + e^y$
 - 9.3 $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + e^x \sin y$
 - 9.4 $u(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy$
 - 9.5 $u(x, y) = \arctan\left(\frac{2xy}{x^2 - y^2}\right)$

5.6 การประมาณค่าเชิงเส้น

สำหรับฟังก์ชัน $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่หาอนุพันธ์ได้ จะได้ว่า

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + E(x, y)$$

เมื่อค่าผิดพลาด $E(x, y)$ มีค่าเข้าใกล้ 0 เราจะประมาณค่าของฟังก์ชันสองตัวแปรในลักษณะเดียวกันกับหนึ่งตัวแปร

บทนิยาม 5.6.1 ค่าเชิงอนุพันธ์รวม (total differential) ของ f ที่จุด (x, y) เขียนแทนด้วย $df(x, y)$ และกำหนดโดย

$$df(x, y) = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y$$

หรืออาจจะเขียน $\Delta x = dx$ และ $\Delta y = dy$

$$df(x, y) = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

ตัวอย่าง 5.6.2 กำหนดให้ $f(x, y) = x^2 \sin xy$ จงหา $df(x, y)$

เราจะประมาณค่า $f(x + dx, y + dy) - f(x, y) \approx df(x, y)$ เมื่อ dx, dy มีค่าน้อย ๆ เราจะได้สูตรการประมาณค่าเชิงเส้น (Linear approximation) ดังนี้

$$f(x + dx, y + dy) \approx f(x, y) + f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

ตัวอย่าง 5.6.3 จงใช้ค่าอนุพันธ์ประมาณค่าของ $\sqrt[3]{(2.01)^2 + (1.98)^2}$

แบบฝึกหัด 5.6

1. จงหาค่าเชิงอนุพันธ์รวม $df(x, y)$ ของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$1.1 \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + xy}$$

$$1.2 \quad f(x, y) = e^x \cos xy$$

$$1.3 \quad f(x, y) = \frac{xy}{x + y}$$

$$1.4 \quad f(x, y) = x^3 \sin x \ln y$$

2. จงประมาณค่าต่อไปนี้

$$2.1 \quad \sqrt{(3.01)^2 + (3.97)^2}$$

$$2.2 \quad (1.002)e^{0.001}$$

$$2.3 \quad \frac{1}{\sqrt[3]{(0.003)^3 + (7.979)^3}}$$

$$2.4 \quad (0.99)^{3.001}$$

$$2.5 \quad 2.01 \sin 32^\circ$$

$$2.6 \quad 0.88 \sqrt{1.11}$$

3. จงหาปริมาตรโดยประมาณของกล่องรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งมีความยาวด้านละ 5.003 เซนติเมตร และสูง 9.997 เซนติเมตร

4. ทรงกระบอกใบหนึ่งรัศมีฐานเป็น 5.026 เซนติเมตร และวัดส่วนสูงได้ 24.003 เซนติเมตร จงคำนวณปริมาตรโดยประมาณของทรงกระบอกนี้

5. กรวยกลมใบหนึ่งมีการเปลี่ยนแปลงรัศมีจาก 3 ฟุต และสูง 4 ฟุต ไปเป็นรัศมี 2.9 ฟุต และสูง 4.3 ฟุต จงหาค่าส่วนการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของกรวยใบนี้โดยใช้ค่าอนุพันธ์รวม

6. ในการคำนวณปริมาตรของกล่องรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากซึ่งวัดความกว้าง ความยาว และความสูงได้ 10 13 และ 16 นิ้วตามลำดับ ถ้าวัดความผิดพลาดไม่เกิน 0.03 นิ้ว จงหาขอบเขตของความผิดพลาดสัมพัทธ์

แบบฝึกหัดบทที่ 5

1. จงหาโดเมนของฟังก์ชันต่อไปนี้ พร้อมวาดกราฟประกอบ

$$1.1 \quad f(x, y) = \frac{\ln(x^2 - y^2 + 1)}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

$$1.2 \quad f(x, y) = \arcsin(x + y) + \sqrt{x^2 - y^2}$$

$$1.3 \quad f(x, y) = \frac{1}{xy} + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$1.4 \quad f(x, y) = \ln(2 + x^2 + y^2) + \frac{1}{x}\sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

2. จงหาลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^3 + y^2}$

3. จงหาลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

4. จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ต่อเนื่องที่จุด $(0, 0)$ หรือไม่

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & : (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & : (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

5. จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ต่อเนื่องที่จุด $(0, 0)$ หรือไม่

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^3}{x^2 + y^4} & : (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & : (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$6. \text{ ให้ } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - xy}{x + y} & \text{เมื่อ } x + y \neq 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x + y = 0 \end{cases}$$

จงหาค่าของ $D_1 f(0, y)$ เมื่อ $y \neq 0$ และ $D_2 f(x, 0)$ เมื่อ $x \neq 0$

7. จงใช้นิยามหาอนุพันธ์ย่อยของ $f_x(1, 1)$ และ $f_y(1, 1)$ เมื่อ $f(x, y) = \frac{x}{x + y}$

8. จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน $f(x, y) = xe^{-\sin(xy)}$

9. จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน $f(x, y) = \frac{e^{x^2+y^2}}{\ln x}$

10. ให้ $z = e^{xy}$, $x = r \cos \theta$ และ $y = r \sin \theta$ จงหา $\frac{\partial z}{\partial r}$ และ $\frac{\partial z}{\partial \theta}$

11. ให้ $z = f(x^2 - y^2)$ จงแสดงว่า $x \frac{\partial z}{\partial y} + y \frac{\partial z}{\partial x} = 0$

12. ให้ $z = f(x, y)$ และ $x = s\sqrt{t}$ และ $y = s^2 + t^2$

$$\text{จงหา } \frac{\partial z}{\partial t} \text{ เมื่อ } (s, t) = (1, 1)$$

โดยที่ $f_x(1, 2) = 2$ และ $f_y(1, 2) = 1$

13. จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของฟังก์ชัน $f(x, y) = xe^{y^2} + ye^{x^2}$

14. จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของฟังก์ชัน $f(x, y) = y \sin\left(\frac{x}{y}\right)$

15. ให้ $u = \sin(xy)$ จงแสดงว่า

$$xu_{xx} + yu_{yx} - u_x + 2xy^2u = 0$$

16. จงแสดงว่า $u(x, y, t) = 5\sin(3\pi x)\sin(4\pi y)\cos(10\pi t)$ เป็นผลเฉลยของสมการ

$$4u_{tt} = 4(u_{xx} + u_{yy})$$

17. จงแสดงว่า $u(x, y, t) = 2\sin\left(\frac{x}{3}\right)\sin\left(\frac{y}{4}\right)e^{\frac{-25t}{16}}$ เป็นผลเฉลยของสมการ

$$u_t = 9(u_{xx} + u_{yy})$$

18. จงประมาณค่าต่อไปนี้โดยใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ $1.001e^{0.009}$

19. จงประมาณค่าต่อไปนี้โดยใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ $(0.98)^{1.005}$

บทที่ 6

ปริพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปร

เราอาจเคยศึกษาปริพันธ์ของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรซึ่งมีโดเมนเป็นสับเซตของ $\mathbb{R}$ ในบทนี้เราจะศึกษาการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรซึ่งมีโดเมนเป็นสับเซตของ $\mathbb{R}^2$ โดยเริ่มต้นจากโดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และขยายแนวคิดไปยังโดเมนทั่วไป โดยบางปัญหาอาจเปลี่ยนไปอยู่ในรูปพิกัดเชิงขั้ว ดังจะกล่าวต่อไป

6.1 ปริพันธ์สองชั้นบนโดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ เมื่อ

$$D = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ และ } c \leq y \leq d\}$$

พิจารณาการแบ่งช่วง $[a, b]$ ออกเป็น m ช่วง ด้วยจุด $x_0, x_1, x_2, \dots, x_m$ โดยที่

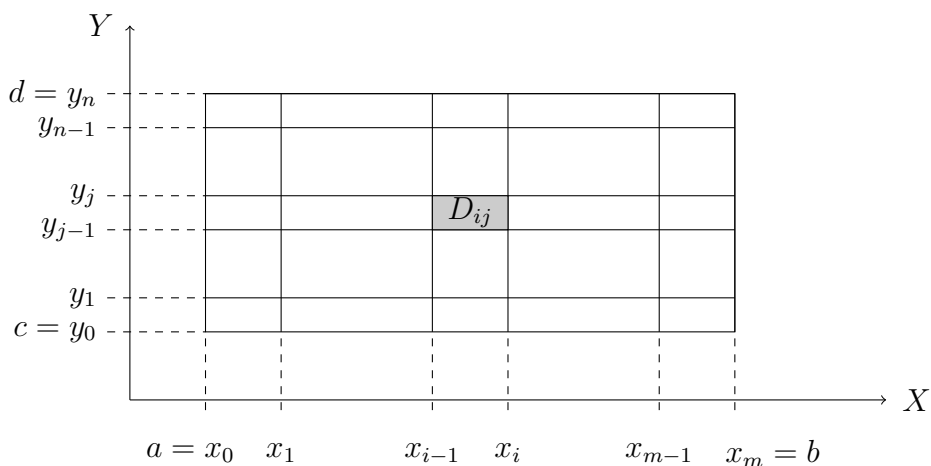
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b$$

แบ่ง $[c, d]$ ออกเป็น n ช่วง ด้วยจุด $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ โดยที่

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = d$$

ให้ $D_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าย่อยของรูป ij เมื่อ $i = 1, 2, \dots, m$ และ $j = 1, 2, \dots, n$

รูปที่ 6.1: การแบ่งพื้นที่ย่อยของโดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า



ให้ $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ และ $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ และ $D_{ij} = \Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$ ให้ $(x_{ij}, y_{ij}) \in D_{ij}$ แล้ว

$$S_{mn} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta A_{ij}$$

เรียก S_{mn} ว่า **ผลบวกรีมันน์ (Riemann sum)** ของ f บน D

ถ้าเราแบ่ง Δx_i และ Δy_j มีค่าเข้าใกล้ศูนย์เมื่อ m และ n มีค่ามาก ๆ และ

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} S_{mn} = L$$

แล้วจะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันที่ **หาปริพันธ์ได้ (integrable)** บน D

และเรียกค่าลิมิต L ว่า **ปริพันธ์สองชั้น (double integral)** ของ f บน D ซึ่งเขียนแทนด้วย

$$\iint_D f \quad \text{หรือ} \quad \iint_D f \, dA \quad \text{หรือ} \quad \iint_D f \, dx \, dy$$

เราสรุปได้ว่า

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta A_{ij}$$

ตัวอย่าง 6.1.1 กำหนดให้ $f(x, y) = xy$ และ $D = [0, 1] \times [0, 2]$ จงหา $\iint_D f \, dA$

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นว่าการคำนวณค่าปริพันธ์สองชั้นผ่านลิมิตของผลบวกรีมันน์ค่อนข้างยุ่งยาก เราจึงพิจารณา เหมือนกับการอินทิเกรตในหนึ่งตัวแปรดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 6.1.2 (การหาปริพันธ์สองชั้น (Iterated integration))

การหาปริพันธ์สองชั้น $f(x, y)$ บนโดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $D = [a, b] \times [c, d]$ คือ

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

หรือ

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

ตัวอย่าง 6.1.3 ให้ $f(x, y) = xy$ จงหา $\int_0^1 \int_0^2 f(x, y) dy dx$ และ $\int_0^2 \int_0^1 f(x, y) dx dy$

ตัวอย่าง 6.1.4 จงหาค่าปริพันธ์สองชั้น $\int_2^4 \int_0^3 (3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2) dy dx$

ตัวอย่าง 6.1.5 จงหาค่าปริพันธ์สองชั้น $\int_{-1}^1 \int_1^2 \frac{x+y}{y} dx dy$

จากบทนิยามของการหาปริพันธ์สองชั้นถ้า $f(x, y) = g(x)h(y)$ เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx &= \int_a^b \left[\int_c^d g(x)h(y) dy \right] dx = \int_a^b g(x) \left[\int_c^d h(y) dy \right] dx \\ &= \left[\int_a^b g(x) dx \right] \left[\int_c^d h(y) dy \right] \end{aligned}$$

ทำนองเดียวกัน

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \left[\int_c^d h(y) dy \right] \left[\int_a^b g(x) dx \right]$$

ตัวอย่าง 6.1.6 จงหาค่าปริพันธ์สองชั้น $\int_{-2}^2 \int_1^3 x(yx^2 + y) dx dy$

ตัวอย่าง 6.1.7 จงหาค่าปริพันธ์สองชั้น $\int_0^3 \int_0^1 2x \sqrt{x^2 + y} \, dx dy$

ฟังก์ชันสองตัวแปร $f(x, y)$ ที่หาปริพันธ์ได้โดยใช้ผลบวกรีมันน์ $\iint_D f(x, y) \, dA$ มีความสัมพันธ์กับบทนิยาม 6.1.2 โดยใช้ทฤษฎีบทฟูบินีซึ่งจะละการพิสูจน์ในวิชานี้

ทฤษฎีบท 6.1.8 (ทฤษฎีบทฟูบินี (Fubini's Theorem))

ให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ เมื่อ $D = [a, b] \times [c, d]$ ถ้า f ต่อเนื่องบน D แล้ว f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บน D และ

$$\iint_D f(x, y) \, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx dy$$

ตัวอย่าง 6.1.9 จงหาค่าปริพันธ์สองชั้น $\iint_D x \sin(xy) \, dA$ เมื่อ $D = [0, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$

แบบฝึกหัด 6.1

1. กำหนดให้ $f(x, y) = x^2y$ และ $D = [0, 1] \times [0, 1]$ จงหา $\iint_D f \, dA$ โดยใช้ผลบวกรีมันน์

2. จงหาค่าปริพันธ์สองชั้นต่อไปนี้

$$2.1 \int_0^1 \int_{-1}^3 (3 - x + 4y) \, dy \, dx$$

$$2.6 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^y \cos x \, dx \, dy$$

$$2.2 \int_1^2 \int_2^3 (x^2y + xy^2) \, dx \, dy$$

$$2.7 \int_0^3 \int_1^2 \frac{1}{x(y+1)} \, dx \, dy$$

$$2.3 \int_0^1 \int_1^6 \frac{1}{x+y} \, dx \, dy$$

$$2.8 \int_0^1 \int_1^3 \frac{x-y}{x+y} \, dx \, dy$$

$$2.4 \int_{-2}^2 \int_3^8 dx \, dy$$

$$2.9 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_1^2 y \cos(xy) \, dx \, dy$$

$$2.5 \int_0^2 \int_0^1 y \sin x \, dy \, dx$$

$$2.10 \int_0^{\ln 2} \int_0^{\ln 3} e^{x+y} \sin x \, dx \, dy$$

3. จงหาค่าปริพันธ์สองชั้นต่อไปนี้บนอาณาบริเวณที่กำหนดให้

$$3.1 \iint_D (3x^2 - y) \, dA \quad D = [0, 2] \times [0, 3]$$

$$3.2 \iint_D y \, dA \quad D = \{(x, y) : -3 \leq x \leq 3, -2 \leq y \leq 5\}$$

$$3.3 \iint_D \frac{y}{(xy+1)^2} \, dA \quad D = [0, 1] \times [0, 1]$$

$$3.4 \iint_D x \sqrt{1-x^2} \, dA \quad D = \text{อาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย } x=0, x=1, y=2 \text{ และ } y=3$$

$$3.5 \iint_D x \cos(xy) \cos^2(\pi x) \, dA \quad D = [0, \frac{1}{2}] \times [0, \pi]$$

$$3.6 \iint_D x e^{xy} \, dA \quad D = [0, 1] \times [0, \ln 5]$$

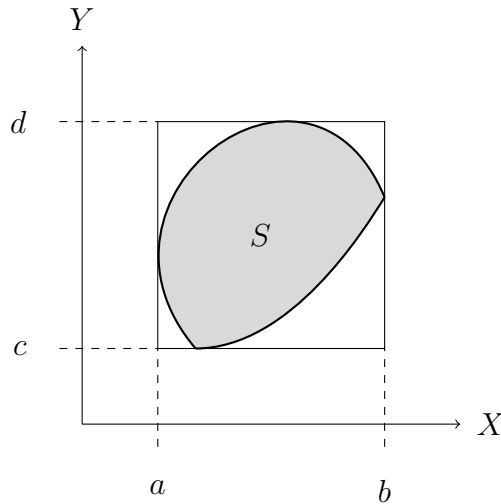
$$4. \text{ จงหาปริพันธ์สองชั้น } \int_{-1}^1 \int_0^1 (x+1)^{2565} (xy+y)^{100} \, dy \, dx$$

$$5. \text{ จงหาปริพันธ์สองชั้น } \int_1^2 \int_0^1 \frac{1}{y^2+x^2} \, dx \, dy$$

6.2 ปริพันธ์สองชั้นบนโดเมนทั่วไป

ให้ $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ เมื่อ $S \subset D = [a, b] \times [c, d]$

รูปที่ 6.2: โดเมนทั่วไปของฟังก์ชันสองตัวแปร



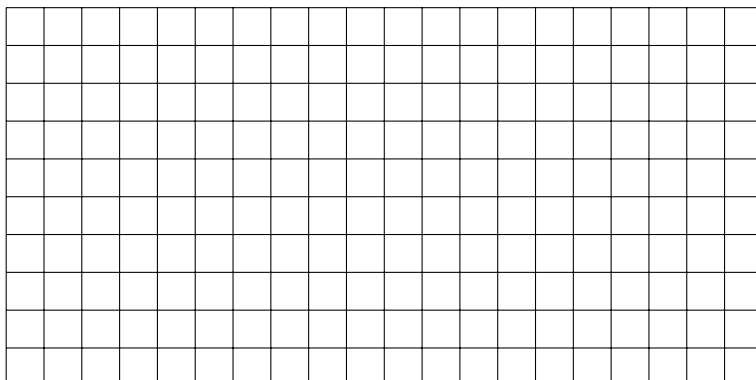
ให้ $\tilde{f} : D \rightarrow \mathbb{R}$ นิยามโดย

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{เมื่อ } x \in S \\ 0 & \text{เมื่อ } x \notin S \end{cases}$$

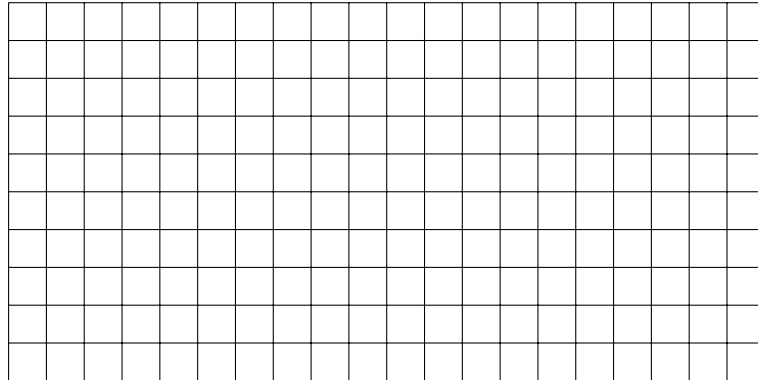
ถ้า $\tilde{f}$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บน D เราจะกล่าวได้ว่า f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บน S โดยนิยามค่าของปริพันธ์เป็น

$$\iint_S f = \iint_D \tilde{f}$$

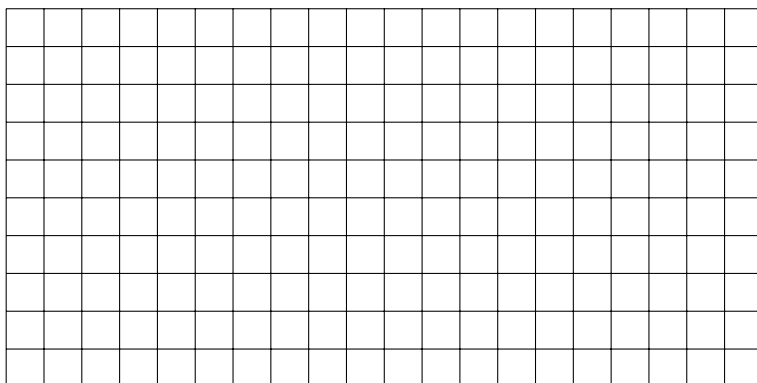
ตัวอย่าง 6.2.1 กำหนดให้ $f(x, y) = 4xy$ และ S เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$ และเส้นตรง $x = 2y$ จงหาค่าของ $\iint_S f$



ตัวอย่าง 6.2.2 จงหาค่าของ $\iint_S y$ เมื่อ $S = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{8} \text{ และ } \sin x \leq y \leq \cos x\}$

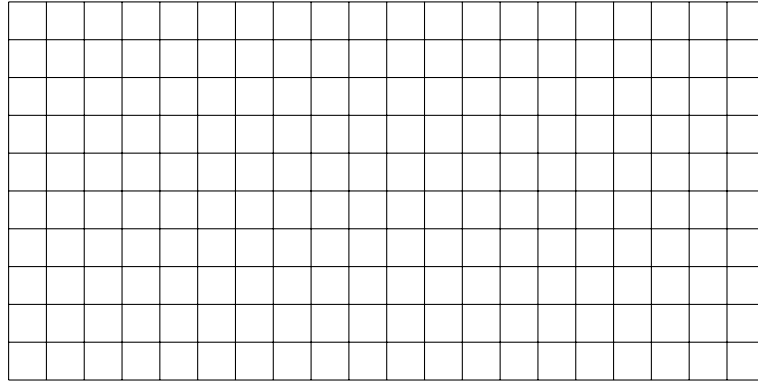


ตัวอย่าง 6.2.3 จงหาค่าปริพันธ์สองชั้นของ $f(x, y) = x^2 + y^2$ บนอาณาบริเวณที่ล้อมรอบด้วย $y = |x|$ และ $y = 2$

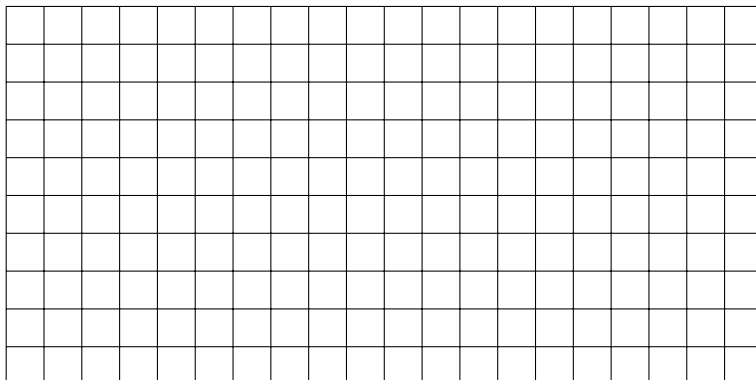


ตัวอย่าง 6.2.4 จงหาค่าของ $\iint_S xy^2 dA$

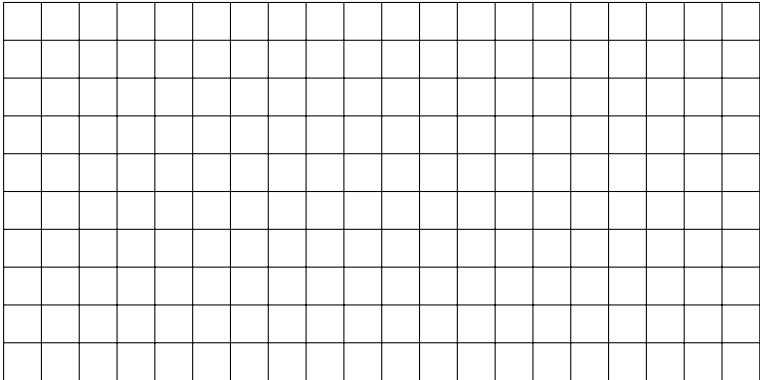
เมื่อ S เป็นอาณาบริเวณที่ล้อมรอบด้วย $y = x^2$ และ $x + y = 2$



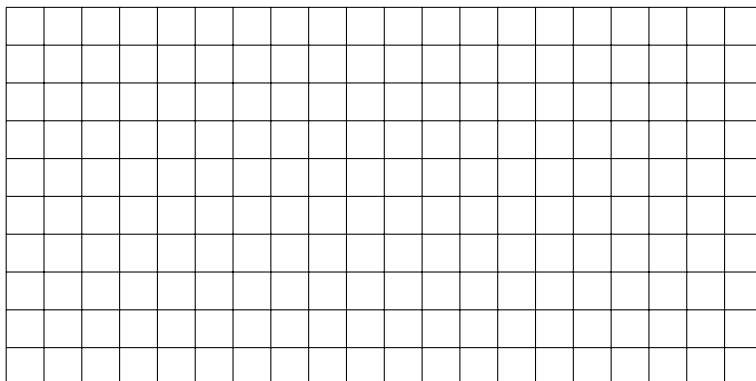
ตัวอย่าง 6.2.5 จงเปลี่ยนลำดับการปริพันธ์ของ $\int_{-2}^0 \int_{1+y^2}^5 f(x, y) \, dx \, dy$



ตัวอย่าง 6.2.6 จงเปลี่ยนลำดับการปริพันธ์ของ $\int_2^6 \int_{|x-3|}^{\frac{x}{2}} f(x, y) \, dy \, dx$



ตัวอย่าง 6.2.7 จงหาค่าของ $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3} dx dy$



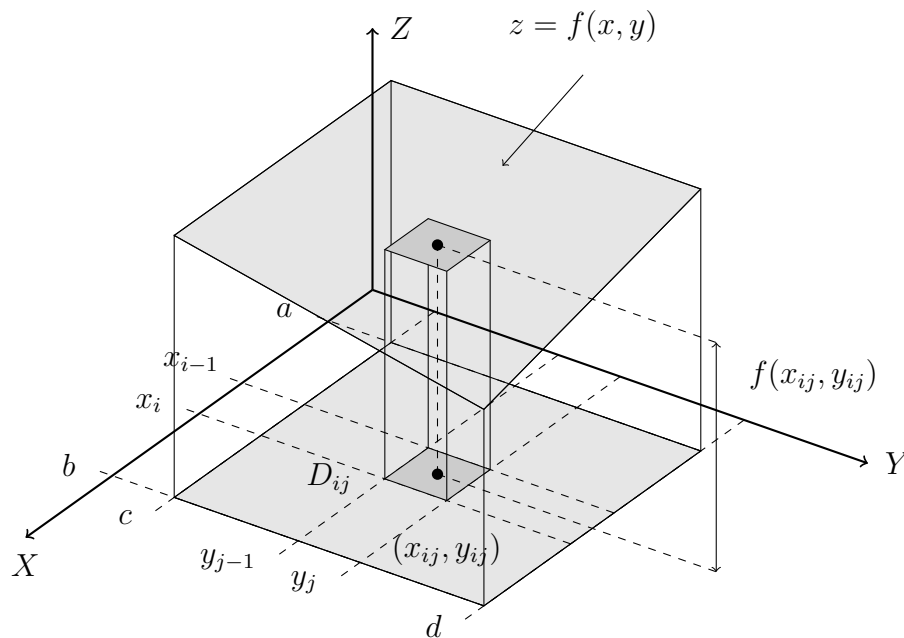
บทประยุกต์ของปริพันธ์สองชั้น

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x, y) \geq 0$ ทุก $(x, y) \in S$ ซึ่งอินทิเกรตได้บน S จากนิยามของการหาปริพันธ์ได้โดยใช้ผลบวกรีมันน์ จะมีความหมายคล้ายคลึงกับปริพันธ์ในฟังก์ชันตัวแปรเดียว นั่นคือ

$$\iint_S f \, dA = \text{ปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งอยู่ภายใต้พื้นผิว } z = f(x, y) \text{ บน } S$$

จากรูป 6.1 เราจะแสดงตัวอย่างของปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งอยู่ภายใต้พื้นผิว $z = f(x, y)$ บน $D = [a, b] \times [c, d]$ ซึ่งเป็นโดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังรูปต่อไปนี้

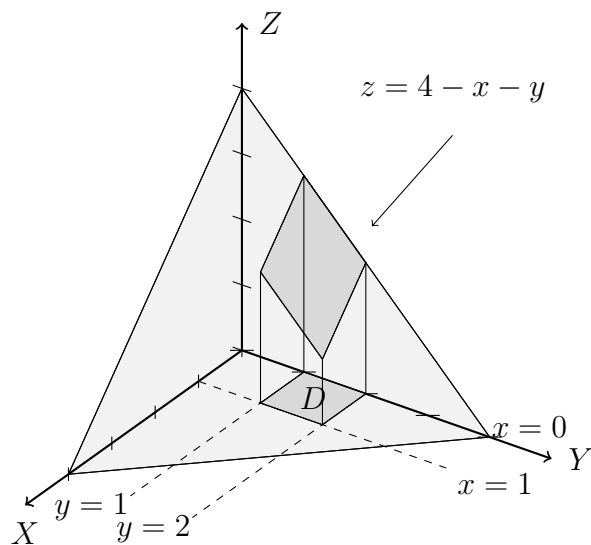
รูปที่ 6.3: ปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งอยู่ภายใต้พื้นผิว $z = f(x, y)$ บน $D = [a, b] \times [c, d]$



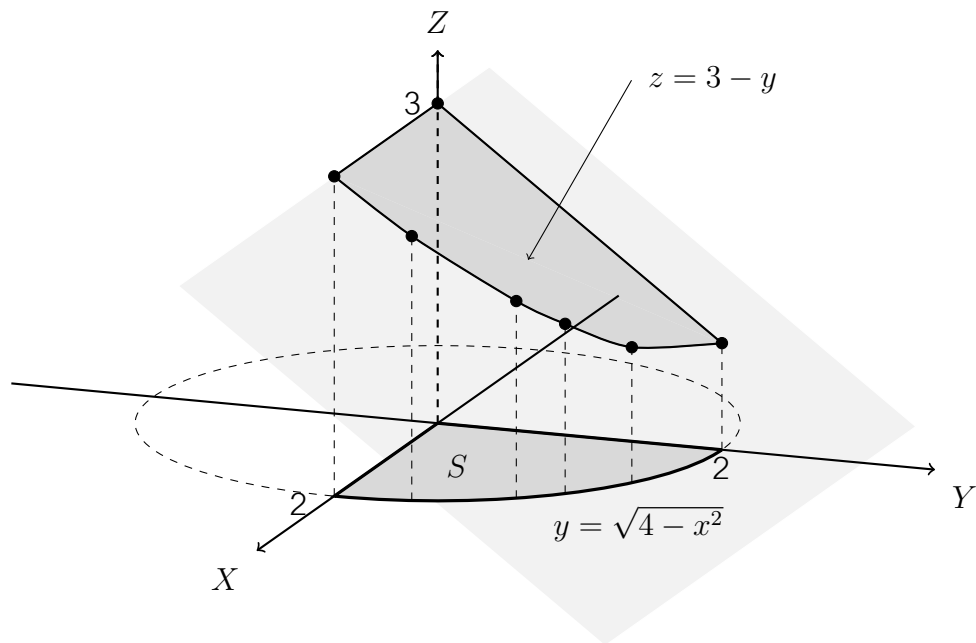
สำหรับกรณี $f(x, y) = 1$ จะได้ว่า

$$\iint_S dA = \text{พื้นที่อาณานิคมของ } S$$

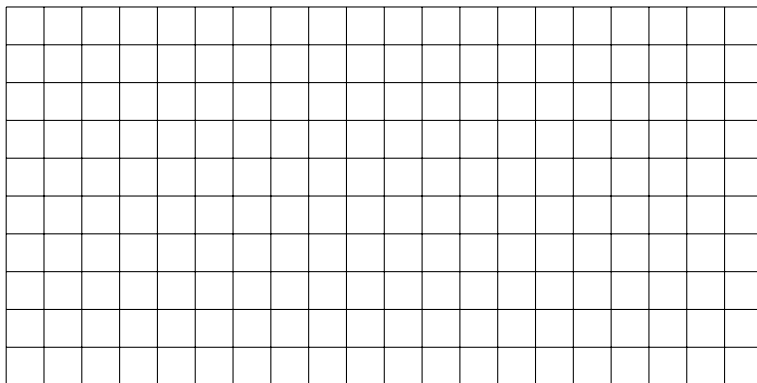
ตัวอย่าง 6.2.8 จงหาปริมาตรรูปทรงตันที่อยู่เหนือระนาบ XY ซึ่งปิดล้อมด้วย ระนาบ $x + y + z = 4$ และปิดล้อมด้วยระนาบ $x = 0$, $x = 1$, $y = 1$ และ $y = 2$



ตัวอย่าง 6.2.9 จงหาปริมาตรของรูปทรงตันในอวกาศที่หนึ่งซึ่งอยู่เหนือระนาบ XY และปิดล้อมด้วยพื้นผิว $x^2 + y^2 = 4$ และระนาบ $y + z = 3$



ตัวอย่าง 6.2.10 จงใช้ปริพันธ์สองชั้นหาพื้นที่ของอาณาบริเวณ R ที่ปิดล้อมด้วย $y = x^2$ และ $x + y = 2$



แบบฝึกหัด 6.2

1. จงเปลี่ยนลำดับการหาปริพันธ์ และเขียนรูปแสดงอาณาบริเวณของการหปริพันธ์

$$1.1 \int_{-2}^0 \int_{2-\sqrt{4-x^2}}^{2+\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy dx$$

$$1.3 \int_0^1 \int_{x^2-4}^0 f(x, y) dx dy$$

$$1.2 \int_0^2 \int_1^{e^y} f(x, y) dx dy$$

$$1.4 \int_0^3 \int_{(y-1)^2}^{y+1} f(x, y) dx dy$$

2. จงหาค่าของ

$$2.1 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} x dx dy$$

$$2.6 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{x^2} \frac{1}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) dy dx$$

$$2.2 \int_1^2 \int_x^{2x} \frac{1}{(x+y)^3} dy dx$$

$$2.7 \int_1^3 \int_0^x \frac{2}{x^2+y^2} dy dx$$

$$2.3 \int_{-1}^1 \int_{-1}^y xye^{x^2} dx dy$$

$$2.8 \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}} (1+y^6) dy dx$$

$$2.4 \int_0^1 \int_0^1 |x-y| dy dx$$

$$2.9 \int_0^1 \int_{4x}^x e^{-y^2} dy dx$$

$$2.5 \int_0^1 \int_0^y x\sqrt{y^2-x^2} dx dy$$

$$2.10 \int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} \sec^2(\cos x) dx dy$$

3. จงหาค่าปริพันธ์สองชั้น $\iint_S f(x, y) dA$ ต่อไปนี้บนอาณาบริเวณที่กำหนดให้

$$3.1 f(x, y) = \cos(x+y) \quad S \text{ คืออาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย } y=x, x=\pi \text{ และแกน } X$$

$$3.2 f(x, y) = xy^2 \quad S \text{ คืออาณาบริเวณเหนือเส้นตรง } y=1-x \text{ และอยู่ภายในวงกลม } x^2+y^2=1$$

$$3.3 f(x, y) = \frac{2y-1}{x+1} \quad S \text{ คืออาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย } y=2x-4, y=0 \text{ และ } x=1$$

4. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่ปิดล้อมด้วย

$$4.1 \text{ ระนาบ } x+2y+3z=6 \text{ ในอัฐภาคที่หนึ่ง}$$

$$4.2 \text{ พื้นผิว } z=1-x^2-y^2 \text{ เหนือระนาบ } XY$$

5. จงใช้ปริพันธ์สองชั้นหาพื้นที่ของอาณาบริเวณ R ที่ปิดล้อมด้วย

$$5.1 y^2+x=0 \text{ และ } y=x+2$$

$$5.2 y=x^2 \text{ และ } y=\sqrt{x}$$

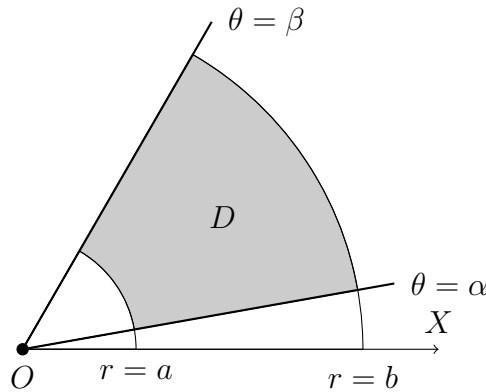
$$5.3 xy=16, y=x, y=0 \text{ และ } x=8$$

6.3 ปริพันธ์สองชั้นบนระบบพิกัดเชิงขั้ว

พิจารณาโดเมนในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$D = \{(r, \theta) : a \leq r \leq b \text{ และ } \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

รูปที่ 6.4: โดเมนในระบบพิกัดเชิงขั้ว



ให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บน D จะแบ่งอาณาบริเวณ D ออกเป็นส่วนย่อย ๆ คือแบ่ง $[a, b]$ ออกเป็น m ช่วงย่อยด้วยจุด $r_0, r_1, r_2, \dots, r_m$ โดยที่

$$a = r_0 < r_1 < r_2 < \dots < r_m = b$$

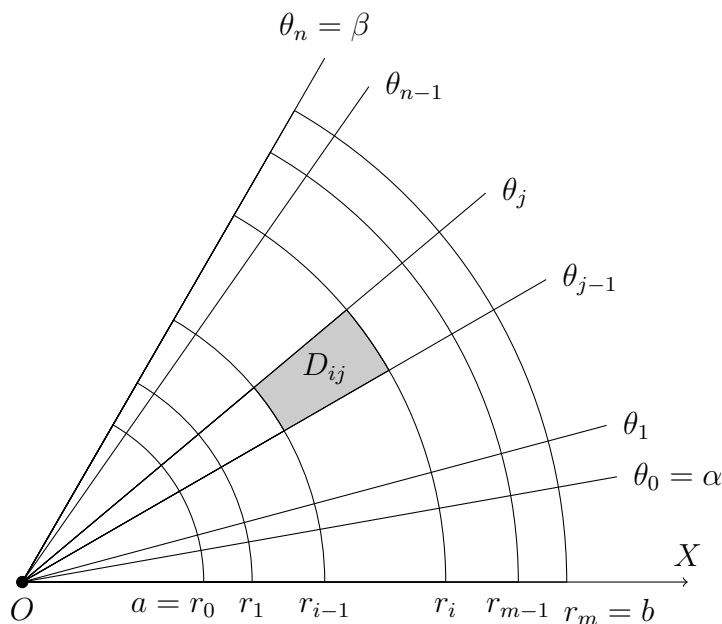
แบ่ง $[\alpha, \beta]$ ออกเป็น n ช่วงย่อยด้วยจุด $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ โดยที่

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n = \beta$$

สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, m$ และ $j = 1, 2, 3, \dots, n$ ให้

$$D_{ij} = \{(r, \theta) : r_{i-1} \leq r \leq r_i \text{ และ } \theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j\}$$

รูปที่ 6.5: การแบ่งพื้นที่ย่อยของโดเมนในระบบพิกัดเชิงขั้ว



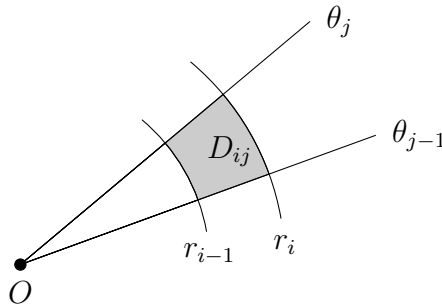
ให้ (x_{ij}, y_{ij}) เป็นจุดใน D_{ij} ดังนั้น

$$x_{ij} = r_{ij} \cos \theta_{ij} \quad \text{และ} \quad y_{ij} = r_{ij} \sin \theta_{ij} \quad \text{เมื่อ} \quad r_{i-1} \leq r_{ij} \leq r_i \quad \text{และ} \quad \theta_{j-1} \leq \theta_{ij} \leq \theta_j$$

และ ΔA_{ij} เป็นพื้นที่ของอาณาบริเวณ D_{ij} ดังนั้นผลบวกรีมันน์คือ

$$S_{mn} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta A_{ij}$$

รูปที่ 6.6: พื้นที่ย่อยที่เกิดจากการแบ่งโดเมนในระบบพิกัดเชิงขั้ว



$$\begin{aligned} \Delta A_{ij} &= \frac{1}{2} r_i^2 (\theta_j - \theta_{j-1}) - \frac{1}{2} r_{i-1}^2 (\theta_j - \theta_{j-1}) = \frac{1}{2} (r_i^2 - r_{i-1}^2) (\theta_j - \theta_{j-1}) \\ &= \frac{1}{2} (r_i + r_{i-1}) (r_i - r_{i-1}) (\theta_j - \theta_{j-1}) \\ &= r_{ij} (r_i - r_{i-1}) (\theta_j - \theta_{j-1}) \quad \left(\text{เลือก } r_{ij} = \frac{1}{2} (r_i + r_{i-1}) \text{ เป็นจุดกึ่งกลาง} \right) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$S_{mn} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_{ij} \cos \theta_{ij}, r_{ij} \sin \theta_{ij}) r_{ij} (r_i - r_{i-1}) (\theta_j - \theta_{j-1})$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บน D ดังนั้น

$$\iint_D f = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} S_{mn} = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta$$

สรุปได้ว่า

$$\iint_D f(x, y) \, dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta$$

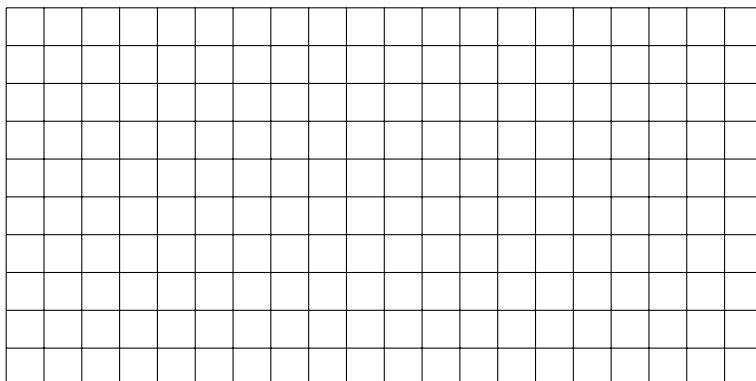
หรือ

$$\iint_D f(x, y) \, dA = \int_a^b \int_{\alpha}^{\beta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, d\theta \, dr$$

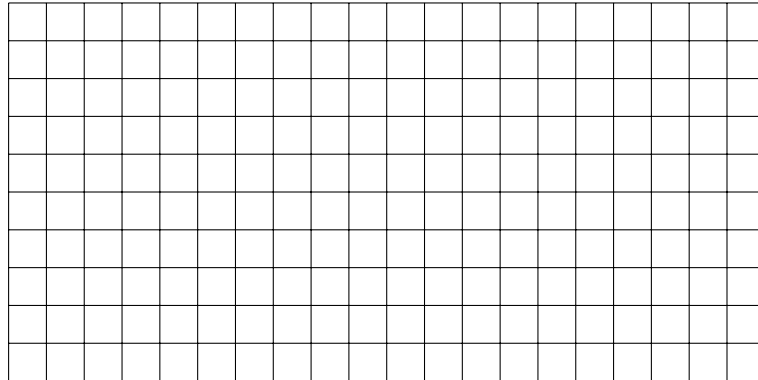
ตัวอย่าง 6.3.1 กำหนดให้ $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ จงหาค่าของ $\int_0^\pi \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r \, dr d\theta$

ตัวอย่าง 6.3.2 ให้ D เป็นอาณาบริเวณในจุดภาคที่หนึ่ง ซึ่งอยู่ระหว่างวงกลม $x^2 + y^2 = 1$ และ $x^2 + y^2 = 4$ จงหา

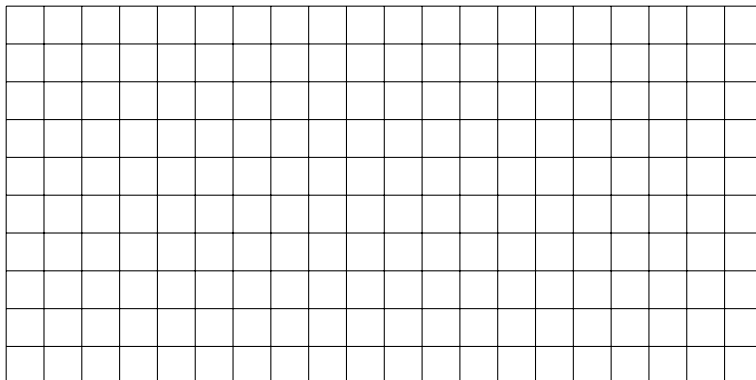
$$\iint_D \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} dA$$



ตัวอย่าง 6.3.3 จงหาค่าของ $\iint_D \cos(x^2 + y^2) dA$ เมื่อ D เป็นอาณาบริเวณในระนาบที่หนึ่งที่
 ปิดล้อมด้วยวงกลม $x^2 + y^2 = 4$ และ เส้นตรง $y = 0$ และ $y = x$



ตัวอย่าง 6.3.4 จงหาค่าของ $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} e^{x^2+y^2} dx dy$

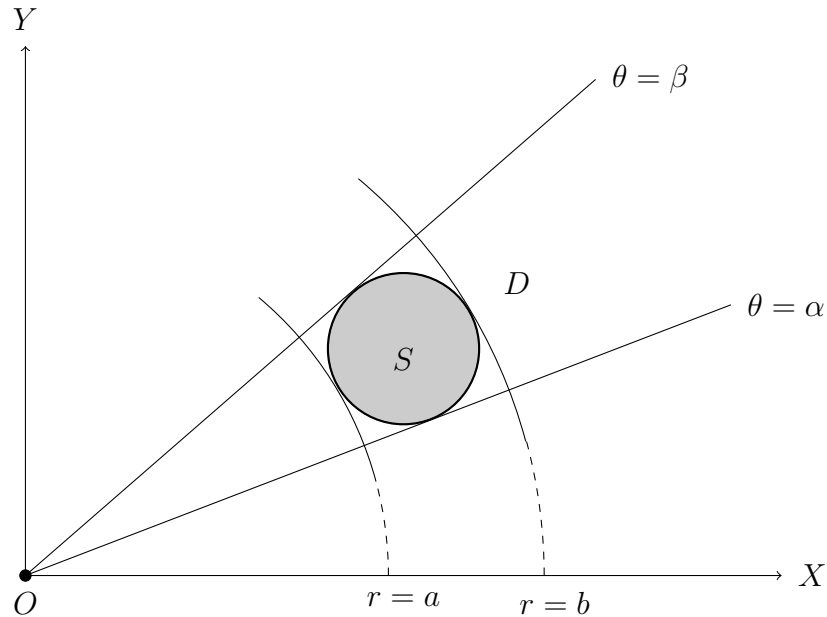


การปริพันธ์บนโดเมนทั่วไป S เมื่อ $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้ เมื่อ $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$ เราจะหาค่าของ $\iint_S f$ โดยการสร้างรูป

$$D = \{(r, \theta) : a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

ล้อมรอบ S แสดงดังรูปต่อไปนี้

รูปที่ 6.7: การสร้างรูป D ล้อมรอบโดเมนทั่วไป S ในระบบพิกัดเชิงขั้ว



และกำหนดฟังก์ชัน $\tilde{f} : D \rightarrow \mathbb{R}$ นิยามโดย

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{เมื่อ } x \in S \\ 0 & \text{เมื่อ } x \notin S \end{cases}$$

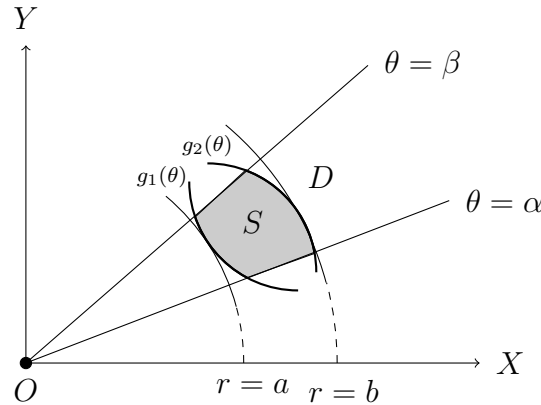
ถ้า $\tilde{f}$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บน D เราจะกล่าวได้ว่า f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บน S โดยนิยามค่าของปริพันธ์เป็น

$$\iint_S f(x, y) dA = \iint_D \tilde{f}(x, y) dA$$

การหาปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้วโดยพิจารณาโดเมนได้ 2 ชนิด ตามลำดับการหาปริพันธ์

ชนิดที่ 1 $drd\theta$ (Type I) $S = \{(r, \theta) : \alpha \leq \theta \leq \beta \text{ และ } g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)\}$

รูปที่ 6.8: โดเมนทั่วไปของฟังก์ชันสองตัวแปรชนิดที่ 1 $drd\theta$

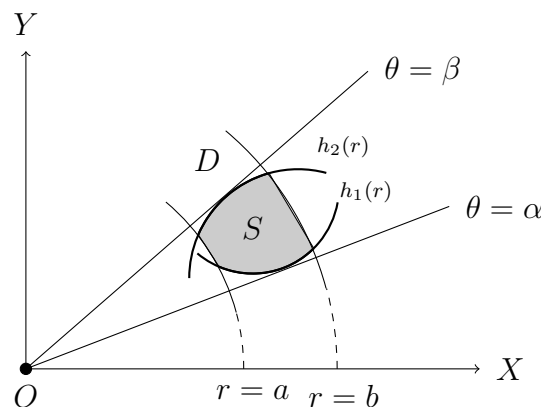


$$\tilde{f}(x, y) = \tilde{f}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } a \leq r < g_1(\theta) \\ f(r \cos \theta, r \sin \theta) & \text{เมื่อ } g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta) \\ 0 & \text{เมื่อ } g_2(\theta) < r \leq b \end{cases}$$

$$\iint_S f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

ชนิดที่ 2 $d\theta dr$ (Type II) $S = \{(r, \theta) : a \leq r \leq b \text{ และ } h_1(r) \leq \theta \leq h_2(r)\}$

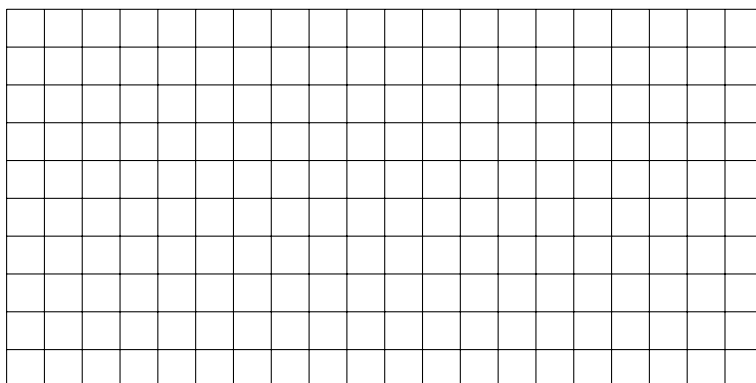
รูปที่ 6.9: โดเมนทั่วไปของฟังก์ชันสองตัวแปรชนิดที่ 2 $d\theta dr$



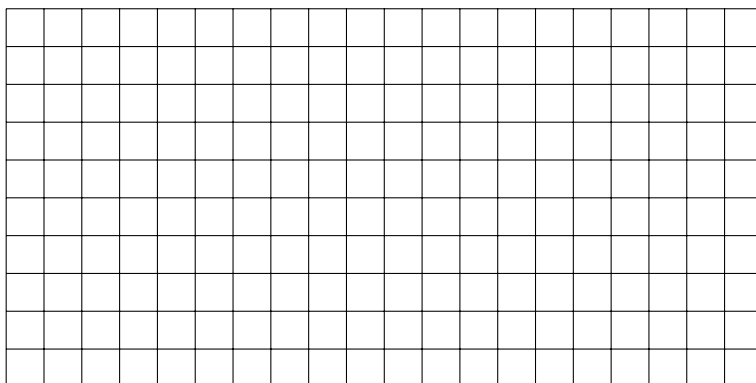
$$\tilde{f}(x, y) = \tilde{f}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } \alpha \leq \theta < h_1(r) \\ f(r \cos \theta, r \sin \theta) & \text{เมื่อ } h_1(r) \leq \theta \leq h_2(r) \\ 0 & \text{เมื่อ } h_2(r) < \theta \leq \beta \end{cases}$$

$$\iint_S f(x, y) dA = \int_a^b \int_{h_1(r)}^{h_2(r)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr$$

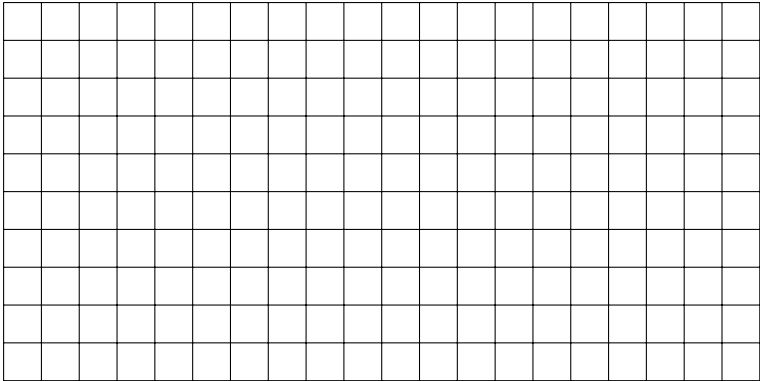
ตัวอย่าง 6.3.5 จงเขียนปริพันธ์ $\int_0^2 \int_x^2 f(x, y) dy dx$ ให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว



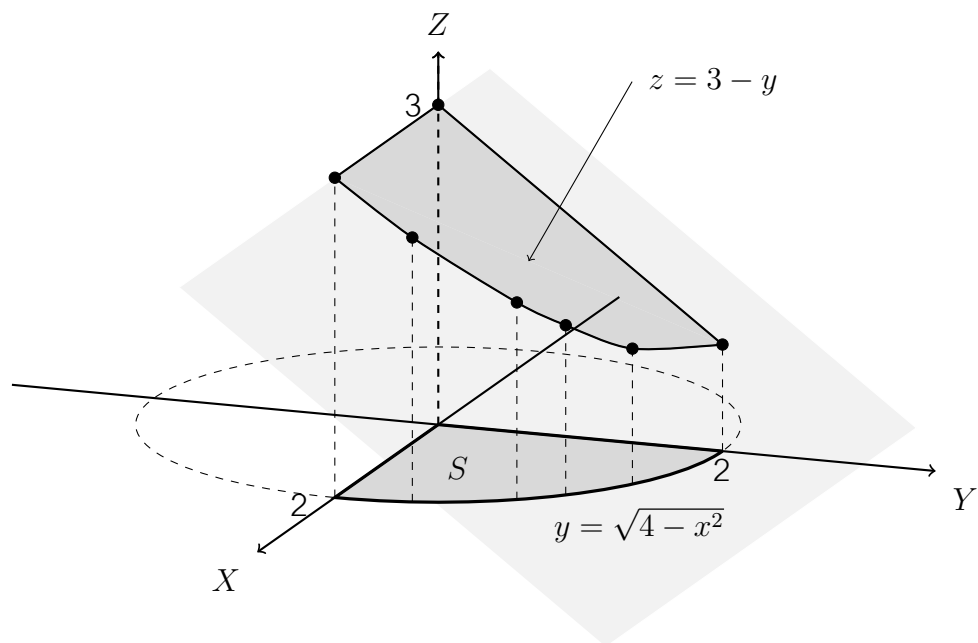
ตัวอย่าง 6.3.6 จงเขียนปริพันธ์ $\int_{-2}^2 \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x, y) \, dx \, dy$ ให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว



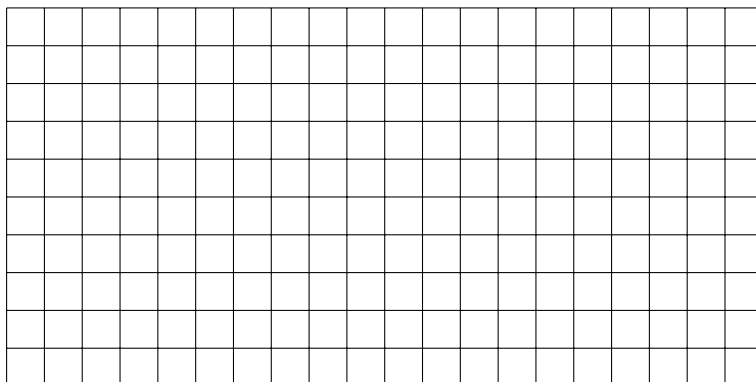
ตัวอย่าง 6.3.7 จงหาค่าของ $\int_1^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dydx$



ตัวอย่าง 6.3.8 จงหาปริมาตรทรงตันในอวกาศที่หนึ่งซึ่งอยู่เหนือระนาบ XY และปิดล้อมด้วยพื้นผิว $x^2 + y^2 = 4$ และระนาบ $y + z = 3$ โดยใช้การหาปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว



ตัวอย่าง 6.3.9 จงใช้ปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว แสดงว่าพื้นที่วงกลมรัศมี R เท่ากับ πR^2



แบบฝึกหัด 6.3

1. จงเขียนปริพันธ์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปพิภพเชิงขั้วพร้อมเขียนรูปแสดงอาณาบริเวณ

$$1.1 \int_0^3 \int_0^x f(x, y) dy dx$$

$$1.4 \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{|y|}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx dy$$

$$1.2 \int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx dy$$

$$1.5 \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) dy dx$$

$$1.3 \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx$$

2. จงเขียนปริพันธ์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปพิภพฉากพร้อมเขียนรูปแสดงอาณาบริเวณ

$$2.1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos \theta} r^2 dr d\theta$$

$$2.2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\csc \theta}^{2 \csc \theta} r \cos \theta dr d\theta$$

$$2.3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \sec \theta} r^2 \sin 2\theta dr d\theta$$

3. จงหาค่าปริพันธ์สองชั้น $\iint_S f(x, y) dA$ ต่อไปนี้บนอาณาบริเวณที่กำหนดให้

$$3.1 \quad f(x, y) = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \quad S \text{ คืออาณาบริเวณในจุดภาคที่หนึ่งที่ปิดล้อมด้วย } x^2 + y^2 = 4$$

$$3.2 \quad f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad S \text{ คืออาณาบริเวณที่อยู่ภายในวงกลม } x^2 + y^2 = 4x \text{ และอยู่ภายนอกวงกลม } x^2 + y^2 = 4$$

$$3.3 \quad f(x, y) = x + y \quad S \text{ คืออาณาบริเวณในจุดภาคที่หนึ่งที่ปิดล้อมด้วย } x^2 + y^2 = 4, y = \sqrt{3}x \text{ และ } y = 0$$

$$3.4 \quad f(x, y) = y\sqrt{x^2 + y^2} \quad S \text{ คืออาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยครึ่งวงกลม } y = \sqrt{2x - x^2} \text{ และแกน X}$$

4. จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยวงกลม $x^2 + y^2 = 1$ และเส้นตรง $x = 3, y = x$ และ $y = 0$

5. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่อยู่ภายในวงกลม $x^2 + y^2 = 4$ เมื่อ $y \geq 3$

6. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณในจุดภาคที่หนึ่งซึ่งอยู่ภายในวงกลม $x^2 + y^2 = 1$ และวงกลม $x^2 + y^2 = 2y$

แบบฝึกหัดบทที่ 6

1. จงหาค่าปริพันธ์สองชั้น $\int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} y \sin^2(xy) dx dy$
2. จงหาค่าปริพันธ์สองชั้น $\int_{-1}^1 \int_0^1 y^2 e^{yx} dy dx$
3. จงเปลี่ยนลำดับการหาปริพันธ์ $\int_{-2}^1 \int_{x^2}^{2-x} f(x, y) dy dx$
4. จงเปลี่ยนลำดับการหาปริพันธ์ $\int_0^3 \int_{(y-1)^2}^{y+1} f(x, y) dx dy$
5. จงหาค่า $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{x^2} \frac{1}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) dy dx$
6. จงหาค่า $\int_0^1 \int_{4x}^4 e^{-y^2} dy dx$
7. จงหาค่า $\int_1^3 \int_0^x \frac{1}{x^2 + y^2} dy dx$
8. จงหา $\iint_S f$ เมื่อ $f(x, y) = \frac{2y-1}{x+1}$ และ S คืออาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y = 2x - 4$, $y = 0$ และ $x = 1$
9. จงเขียนปริพันธ์ต่อไปนี้ในรูปพิกัดเชิงขั้ว $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{|y|}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx dy$
10. จงเขียนปริพันธ์ต่อไปนี้ในรูปพิกัดเชิงขั้ว $\int_0^1 \int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{3}} f(x, y) dy dx$
11. จงหา $\iint_S f(x, y) dA$ เมื่อ $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ และ S คืออาณาบริเวณภายในวงกลม $x^2 + y^2 = 4x$ และภายนอกวงกลม $x^2 + y^2 = 4$
12. จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วย $x^2 + y^2 = 1$, $y = x$, $y = 0$ และ $x = 3$ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว
13. จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยวงกลม $x^2 + y^2 = 4x$ และเส้นโค้ง $y = \sqrt{2x}$ กับแกน X
14. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันเหนือระนาบ XY ซึ่งอยู่ภายใต้พื้นผิว $z = 1 - x^2 - y^2$ และล้อมรอบด้วยพื้นผิวด้านข้างด้วย $x^2 + y^2 = x$
15. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันเหนือระนาบ XY ซึ่งอยู่ภายใต้พื้นผิว $z = 4 + x + 2y$ และล้อมรอบด้วยพื้นผิวด้านข้างด้วย $x^2 + y^2 = 1$

16. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันในอัฐภาคที่หนึ่งซึ่งปิดล้อมด้านข้างด้วย $x^2 + y^2 = 4y$ และส่วนบนปิดด้วย $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
17. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันเหนือระนาบ XY ซึ่งล้อมรอบด้วยด้านข้างด้วยพื้นผิว $x^2 + y^2 - 2x = 0$ และส่วนบนปิดด้วยพื้นผิว $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
18. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่อยู่ภายใต้พื้นที่ผิว $z = 4x^3 + 3x^2y$ และอยู่เหนือรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 4\}$
19. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันในอัฐภาคที่หนึ่งซึ่งปิดล้อมด้วย

$$\text{ระนาบ } x = 0, z = 0, x = 5, z - y = 0 \text{ และ } z = 6 - 2y$$

20. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่ปิดล้อมด้วย

20.1 ระนาบ $x + y + z = 3, y = x, x + y = 2, x = 0$ และ $z = 0$ โดยที่ $x + y \geq 2$

20.2 พื้นผิว $4x^2 + y^2 = 9$ ระนาบ $z = y + 3$ และอยู่เหนือระนาบ XY

20.3 พื้นผิว $z = x^2 + y^2$ และ $x^2 + y^2 = 4$ ในอัฐภาคที่หนึ่ง

21. จงหาปริมาตรทรงตันในอัฐภาคที่หนึ่งซึ่งปิดล้อมด้วยพื้นผิว $z = 4 - x^2 - y^2$ และระนาบ $x + y = 1$ โดยที่ $x + y \leq 1$

22. จงใช้ปริพันธ์สองชั้นหาพื้นที่ของอาณาบริเวณ R ที่ปิดล้อมด้วย

22.1 $y = 2|x|$ และ $y = x + 1$

22.2 $y^2 = 9 - x$ และ $y^2 = 9 - 9x$

22.3 $y = x^2 + x$ และ $y = 3 - x^2$

บทที่ 7

สมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น

7.1 สมการเชิงอนุพันธ์

สมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ฟังก์ชันกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้น เรียกว่า **สมการเชิงอนุพันธ์** (differential equation) ตัวอย่างเช่น

1. สมการการเคลื่อนที่ (Equation of motion)

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

2. สมการการเติบโตของจำนวนประชากร (Population growth equation)

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

3. สมการคลื่นในหนึ่งมิติ (One-dimensional wave equation)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

บทนิยาม 7.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเดียวเรียกว่า **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ** (Ordinary Differential Equation : ODE) ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันมากกว่าหนึ่งตัวแปร เรียกว่า **สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย** (Partial Differential Equation : PDE)

ตัวอย่าง 7.1.2 จงตรวจสอบว่าสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ เป็น ODE หรือ PDE

สมการเชิงอนุพันธ์	ODE	PDE
$\frac{d^2y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} = e^x$		
$\frac{d^3x}{dt^3} - 2 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{d^2x}{dt^2}$		
$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 \sin x$		

บทนิยาม 7.1.3 อันดับ (order) ของสมการเชิงอนุพันธ์ คืออันดับสูงสุดของอนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการนั้น **ดีกรี (degree) ของสมการเชิงอนุพันธ์** คือกำลังสูงสุดของอนุพันธ์อันดับสูงสุดที่ปรากฏในสมการนั้น เมื่อจัดทุก ๆ กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่าง 7.1.4 จงบอกอันดับและดีกรีของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

สมการเชิงอนุพันธ์	อันดับ	ดีกรี
$\frac{dy}{dx} = x^3$		
$y \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$		
$xu \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)^3 = \cos t$	3	3
$xy^2 = y' + \sqrt{1+y'}$		

บทนิยาม 7.1.5 เรียกสมการเชิงอนุพันธ์ว่า **สมการเชิงเส้น (linear equation)** ถ้า

1. ทุก ๆ ตัวแปรตามและอนุพันธ์ของตัวแปรตามมีเลขชี้กำลังเป็น 1
2. ไม่มีพจน์ในรูปผลคูณของตัวแปรตาม และ/หรือ อนุพันธ์ของตัวแปรตามปรากฏในสมการ
3. ไม่มีพจน์ในรูปฟังก์ชันอดิศัยของตัวแปรตามหรือ อนุพันธ์ของตัวแปรตามปรากฏในสมการ

และเรียกสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่เป็นสมการเชิงเส้นว่า **สมการไม่เชิงเส้น (nonlinear equation)**

ตัวอย่าง 7.1.6 จงตรวจสอบว่าสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ เป็นสมการเชิงเส้นหรือไม่

สมการเชิงอนุพันธ์	สมการเชิงเส้น	สมการไม่เชิงเส้น
$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 3x^2$		
$y \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} = \tan x$		
$\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)^2 = \sin u$		
$xy^2 = y' + yy''$		
$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$		

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งใดก็หนึ่งจะเขียนได้เป็น

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{หรือ} \quad M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

บทนิยาม 7.1.7 ฟังก์ชันซึ่งไม่เป็นฟังก์ชันของอนุพันธ์ และสอดคล้องสมการเชิงอนุพันธ์ เรียกว่า **ผลเฉลย (solution)** ของสมการเชิงอนุพันธ์

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อาจอยู่ในรูปของฟังก์ชันที่นิยามแบบแจ่มชัด (explicite function) หรือฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยาย (implicite function) ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีค่าคงตัวไม่เจาะจงเรียกว่า **ผลเฉลยทั่วไป (general solution)** และผลเฉลยที่กำหนดค่าคงตัวแน่นอนเรียกว่า **ผลเฉลยเฉพาะ (particular solution)**

ตัวอย่าง 7.1.8 จงแสดงว่า $y = Ae^{-3x} + Be^x$ ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'' + 2y' = 3y$

ตัวอย่าง 7.1.9 จงแสดงว่า $y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$

ตัวอย่าง 7.1.10 จงแสดงว่า $y = x - \frac{1}{x}$ ผลเฉลยเฉพาะของสมการ $xy' + y = 2x$

ตัวอย่าง 7.1.11 จงแสดงว่า $y = \sin x \cos x - \cos x$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$y' + (\tan x)y = \cos^2 x$$

ตัวอย่าง 7.1.12 จงแสดงว่า $x^2y - xy^2 = c$ สอดคล้องสมการ $(x^2 - 2xy)y' = y^2 - 2xy$

แบบฝึกหัด 7.1

1. จงบอกอันดับ ดีกรี รวมทั้งระบุว่าสมการใดเป็นสมการเชิงเส้น หรือเป็นสมการไม่เชิงเส้น

1.1 $\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x$

1.2 $y''' + 2y'' + 3y' + 4y = \cos x$

1.3 $e^x \frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + y'}$

1.4 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + x \frac{d^2y}{dx^2} = \ln x$

1.5 $(x^2 - 1)y' + xy^2 + 1 = 0$

1.6 $u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial u}{\partial x}$

2. จงแสดงว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

2.1 $y = cx + \sqrt{1 - c^2}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของ $xy' + \sqrt{1 - (y')^2} = y$

2.2 $(x - c)^2 + y^2 = a^2$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของ $y^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = a^2$

2.3 $y^2 - x = 0$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ $y = 2x \frac{dy}{dx}$

2.4 $y = 4 + \frac{4}{x}$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ $x \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} = 0$

7.2 สมการแยกตัวแปรได้

บทนิยาม 7.2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ที่สามารถเขียนในรูป

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad \text{หรือ} \quad M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0$$

เรียกว่าเป็น **สมการแบบแยกตัวแปรได้** (variable separable equation)

วิธีหาผลเฉลย สมการแบบแยกตัวแปรได้ คือสมการที่สามารถเขียนได้ในรูป

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0$$

การหาผลเฉลยของสมการแบบแยกตัวแปรได้คือการอินทิเกรตแต่ละส่วน

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)} dy = c$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง

ตัวอย่าง 7.2.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $3(1 - y^2) dx - 2xy dy = 0$

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{y - xy}{x^2 + 1}$

ตัวอย่าง 7.2.3 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $(\ln y)^2 y' = x^2 y$ เมื่อ $y(3) = 1$

2. $4\sin^2 x \, dy + \sec^2 y \, dx = 0$ เมื่อ $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

แบบฝึกหัด 7.2

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1.1 $\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x$

1.2 $(y^4 + y)y' = \sin x - \cos x$

1.3 $x^3 \frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 - x^2 y^2}$ เมื่อ $x > 0$

1.4 $3(4y^2 + 1) dx = y(x - 1) dy$

1.5 $\frac{1 + e^x}{1 - e^{-y}} dy + e^{x+y} dx = 0$

1.6 $(x^2 y + x^2) dx = (xy^2 - y^2) dy$

1.7 $(x^2 + 1)y' + y^2 + 1 = 0$

1.8 $(x^2 y^2 \sec x \tan x + xy^2 \sec x) dx + xy^3 dy = 0$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

2.1 $\cos^2 x \frac{dy}{dx} = \sin^2 y$ เมื่อ $y(0) = \frac{\pi}{2}$

2.2 $\sqrt{x^2 + 1} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ เมื่อ $y(\sqrt{3}) = 2$

2.3 $dy = \frac{9e^x}{ey^2 + y^2 e^2} dx$ เมื่อ $y(1) = 3$

2.4 $x dy = \frac{y}{x - x^3} dx$ เมื่อ $y(2) = -2$

7.3 สมการเอกพันธ์

บทนิยาม 7.3.1 เรียกฟังก์ชัน $F(x, y)$ ว่าฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี n (homogeneous function of degree n) ถ้ามีจำนวนเต็ม n ที่ทำให้

$$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x, y) \quad \text{สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก } \lambda$$

ตัวอย่าง 7.3.2 จงพิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้ว่าเป็นฟังก์ชันเอกพันธ์หรือไม่ ถ้าเป็นดีกรีเท่าใด

1. $f(x, y) = x^3 + 2xy^2$

2. $f(x, y) = \frac{x^2 - 2y^2}{xy}$

3. $f(x, y) = \frac{1}{y} \cos\left(\frac{x}{y}\right)$

4. $f(x, y) = x^2 \sin(xy)$

บทนิยาม 7.3.3 สมการเชิงอนุพันธ์ $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เอกพันธ์ (homogeneous differential equation) ถ้า $M(x, y)$ และ $N(x, y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ที่มีดีกรีเท่ากัน หรือพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เอกพันธ์ก็ต่อเมื่อ $F(x, y)$ เป็นสมการเอกพันธ์ดีกรี 0

วิธีหาผลเฉลย เนื่องจาก $F(x, y)$ เป็นสมการเอกพันธ์ดีกรี 0 ดังนั้น $F(x, y) = F(\lambda x, \lambda y)$

ให้ $\lambda = \frac{1}{x}$ เมื่อ $x > 0$ และ $\lambda = -\frac{1}{x}$ เมื่อ $x < 0$ จะได้ว่า

$$F(x, y) = F(\lambda x, \lambda y) = F\left(1, \frac{y}{x}\right) = G\left(\frac{y}{x}\right)$$

ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์เอกพันธ์จะอยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = G\left(\frac{y}{x}\right)$$

ให้ $v = \frac{y}{x}$ แล้ว $y = vx$ ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$ ทำให้ได้ว่า

$$v + x \frac{dv}{dx} = G(v)$$

เห็นได้ชัดว่าเป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ในพจน์ของ x และ v

ตัวอย่าง 7.3.4 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(y^2 - x^2) dx + xy dy = 0$$

ตัวอย่าง 7.3.5 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$x \frac{dy}{dx} - y = x \cos \left(\frac{y}{x} \right)$$

ตัวอย่าง 7.3.6 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$xyy' = x^2e^{-\frac{y}{x}} + y^2 \quad \text{เมื่อ } y(1) = 0$$

แบบฝึกหัด 7.3

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$1.1 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}$$

$$1.2 \quad x \, dy - \left(x \tan\left(\frac{y}{x}\right) + y \right) dx = 0$$

$$1.3 \quad (x^2y + y^3) \, dx + x^3 \, dy = 0$$

$$1.4 \quad 2xy \, dx + (x^2 + y^2) \, dy = 0$$

$$1.5 \quad xy' = x + y$$

$$1.6 \quad x \left(1 + \ln\left(\frac{y}{x}\right) \right) y' = y$$

$$1.7 \quad 2x \, dy - 2y \, dx = \sqrt{x^2 + 4y^2} \, dx \quad \text{เมื่อ } x > 0$$

$$1.8 \quad 2ye^{\frac{x}{y}} \, dx = (2xe^{\frac{x}{y}} - y) \, dy$$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$2.1 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y} \quad \text{เมื่อ } y(-1) = 0$$

$$2.2 \quad x^2y \, dx - (x^3 - y^3) \, dy = 0 \quad \text{เมื่อ } y(1) = 1$$

$$2.3 \quad 14xyy' = 6x^2 - 7y^2 \quad \text{เมื่อ } y(-2) = 1$$

$$2.4 \quad x^2y' = 3x^2 - 2xy + y^2 \quad \text{เมื่อ } y(1) = \frac{3}{2}$$

7.4 สมการแม่นตรง

บทนิยาม 7.4.1 สมการเชิงอนุพันธ์ $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แม่นตรง (exact differential equation) ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชัน $F(x, y)$ ที่ทำให้

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{และ} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$$

ทุก ๆ (x, y) ในอาณาบริเวณ R

วิธีหาผลเฉลย เนื่องจาก $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ ดังนั้น $dF(x, y) = 0$ นั่นคือ

$$\text{ผลเฉลยทั่วไปของสมการแม่นตรงคือ} \quad F(x, y) = c$$

จากสมบัติค่าเชิงอนุพันธ์จะได้ว่า

$$\begin{aligned} dF(x, y) &= M(x, y) dx + N(x, y) dy \\ \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy &= M(x, y) dx + N(x, y) dy \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{และ} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$$

จะได้ว่า $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ และ $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ถ้า $M, N, \frac{\partial M}{\partial y}$ และ $\frac{\partial N}{\partial x}$ ต่อเนื่องในอาณาบริเวณ R จะได้ว่า

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ดังนั้น

$$F(x, y) = \int M(x, y) dx + C(y)$$

หา $C(y)$ ได้จาก $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$

ในทำนองเดียวกัน

$$F(x, y) = \int N(x, y) dy + C(x)$$

หา $C(x)$ ได้จาก $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y)$

ตัวอย่าง 7.4.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(2xy^3 - ye^{-x}) dx + (3x^2y^2 + e^{-x} - 4) dy = 0$$

ตัวอย่าง 7.4.3 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{x+y^2}{xy^2}dy - \frac{y-4}{x^2}dx = 0 \quad \text{เมื่อ } y(-1) = 1$$

แบบฝึกหัด 7.4

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1.1 $2x - y^3 - 3xy^2y' = 0$

1.2 $(2x - 5y) dy = (6x - 2y) dx$

1.3 $x(x\cos(x^2y) - 2y)y' + 2xy\cos(x^2y) = y^2$

1.4 $(\sin xy + xy + \cos xy) \frac{dy}{dx} + y^2 \cos xy = 0$

1.5 $\frac{3xy + 1}{y} dx + \frac{2y - x}{y^2} dy = 0$

1.6 $\pi y + (\pi x + \arcsin y) \frac{dy}{dx} = \sin x$

1.7 $\frac{\ln y}{x} dx + \left(\frac{\ln x}{y} + \sin y\right) dy = 0$

1.8 $(2xye^{x^2} + \sin y) dx + (x^2e^{x^2y} + x\cos y - y) dy = 0$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

2.1 $(3x^2y + 2xy) dx + (x^3 + x^2 + 2y) dy = 0$ เมื่อ $y(1) = 2$

2.2 $(e^y + ye^x) dx - (e^x + xe^y) dy = 0$ เมื่อ $y(1) = 0$

2.3 $(\sin^2 x - 2y\cos x)y' - 2y\sin x\cos x + y^2\sin x = 0$ เมื่อ $y(0) = -2$

2.4 $\ln(1 + y^2) = \left(\frac{1}{y} - \frac{2xy}{1 + y^2}\right) \frac{dy}{dx}$ เมื่อ $y(2) = \sqrt{e - 1}$

7.5 ตัวประกอบปริพันธ์

ในกรณีที่ $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ เป็นไม่เป็นสมการแม่นตรงแต่มี $\mu(x, y)$ ที่ทำให้

$$\mu(x, y)(M(x, y) dx + N(x, y) dy) = 0$$

เป็นสมการแม่นตรง เราจะเรียกฟังก์ชัน $\mu(x, y)$ นี้ว่า **ตัวประกอบปริพันธ์** (integrating factor) ของสมการเชิงอนุพันธ์นี้ แล้ว

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} &= \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \\ \mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} &= \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x}\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{\mu} \left(N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

กรณีที่ 1. μ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x เพียงอย่างเดียว

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu} N \frac{d\mu}{dx} &= \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \\ N \frac{d}{dx} \ln|\mu| &= \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{d}{dx} \ln|\mu| &= \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = f(x)\end{aligned}$$

ดังนั้น $\mu = e^{\int f(x) dx}$

กรณีที่ 2. μ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร y เพียงอย่างเดียว

$$\frac{d}{dy} \ln|\mu| = \frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) = g(y)$$

ดังนั้น $\mu = e^{\int g(y) dy}$ สรุปได้ว่า

1. สำหรับ $f(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$ มีตัวประกอบปริพันธ์เป็น $\mu = e^{\int f(x) dx}$
2. สำหรับ $g(y) = \frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$ มีตัวประกอบปริพันธ์เป็น $\mu = e^{\int g(y) dy}$

ตัวอย่าง 7.5.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $(3x + 2y^2) dx + 2xy dy = 0$

2. $(x^2 + y^2 + 1) dx + x(x - 2y) dy = 0$

ตัวอย่าง 7.5.2 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y(1 + x^2y)dx - xdy = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad y(0) = -1$$

แบบฝึกหัด 7.5

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1.1 $2xy \, dx + (x^3 + 2xy) \, dy = 0$

1.2 $(4xy - 3x - 3x^2) \, dy - (2xy - y^2 + y) \, dx = 0$

1.3 $(xy + y - 1) \, dx + x^3 x \, dy = 0$

1.4 $y(x + y^3) \, dx + x(y^3 - x) \, dy = 0$

1.5 $(xy - x^2)y' - xy + 1 = 0$

1.6 $(1 + x \sin y)y' + \cos y = 0$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

2.1 $2y(x^2 - y + x) \, dx + (x^2 - 2y) \, dy = 0$ เมื่อ $y(0) = -1$

2.2 $(x^2 + y) \, dx + (x^2 \cos y - x) \, dy = 0$ เมื่อ $y(2) = 0$

2.3 $1 + (x \tan y - 2 \sec y)y' = 0$ เมื่อ $y(-1) = \pi$

7.6 สมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง

บทนิยาม 7.6.1 สมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง คือสมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

วิธีหาผลเฉลย สามารถจัดรูปได้เป็น $[P(x)y - Q(x)] dx + dy = 0$

ดังนั้น $M(x, y) = P(x)y - Q(x)$ และ $N(x, y) = 1$ จะได้ว่า

$$P(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$$

ดังนั้น $\mu = e^{\int P(x) dx}$

$$\mu \frac{dy}{dx} + \mu P(x)y = \mu Q(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu Q(x)$$

$$\mu y = \int \mu Q(x) dx + C$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = \frac{1}{\mu} \left(\int \mu Q(x) dx + C \right)$$

ตัวอย่าง 7.6.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} - 2xy = x$

ตัวอย่าง 7.6.3 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $(y \cot x - \sec^2 x) dx + dy = 0$

ตัวอย่าง 7.6.4 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(xy + x + x^3) dx + (1 + x^2) dy = 0 \quad \text{เมื่อ } y(0) = 1$$

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งดีกรีนึงบางสมการไม่เป็นสมการเชิงเส้น เราอาจทำให้เป็นสมการเชิงเส้นโดยอาศัยการเปลี่ยนตัวแปรที่เหมาะสม เช่นสมการต่อไปนี้จะเรียกว่า **สมการแบร์นูลลี** (Bernoulli's equation)

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

เมื่อ n เป็นค่าคงตัว เปลี่ยนตัวแปรโดยให้ $z = y^{1-n}$ จะสมการแบร์นูลลีจะเปลี่ยนเป็นสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

จะได้ $\mu = e^{\int (1-n)P(x) dx}$ ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $z = \frac{1}{\mu} \left(\int \mu(1-n)Q(x) dx + C \right)$ หรือ

$$y^{1-n} = \frac{1}{\mu} \left(\int \mu(1-n)Q(x) dx + C \right)$$

ตัวอย่าง 7.6.5 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $(1+x^2)\frac{dy}{dx} + xy = xy^3$

ตัวอย่าง 7.6.6 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{2x} = \frac{x}{y^3} \quad \text{เมื่อ } y(1) = 2$$

แบบฝึกหัด 7.6

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$1.1 \quad \frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x}$$

$$1.2 \quad x^2 y' + 3xy + 2x^5 = 0$$

$$1.3 \quad (2y - 4) dx + dy = 0$$

$$1.4 \quad x \frac{dy}{dx} + 3y = \frac{\sin x}{x^2}$$

$$1.5 \quad y' - y = \frac{1}{1 - e^{-x}}$$

$$1.6 \quad \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x \ln x} = x^2$$

$$1.7 \quad (3xy - 4y - 3x) dx + (x^2 - 3x + 2) dy = 0$$

$$1.8 \quad 2(y - 3 \sin x) \cos x dx + \sin x dy = 0$$

$$1.9 \quad (x^2 + y^2) dx - 2xy dy = 0$$

$$1.10 \quad (y + xy^2) dx - dy = 0$$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$2.1 \quad (x - 1)^3 \frac{dy}{dx} + 4(x - 1)^2 y = x + 1 \quad \text{เมื่อ } y(3) = \frac{1}{2}$$

$$2.2 \quad (y - e^x \sin x) dx + dy = 0 \quad \text{เมื่อ } y(0) = -1$$

$$2.3 \quad (\cos x) y' + y = 1 \quad \text{เมื่อ } y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

$$2.4 \quad \frac{dy}{dx} + \frac{x^3 y}{x^4 + 1} = x^7 \quad \text{เมื่อ } y(0) = 1$$

$$2.5 \quad xy' + y = y^2 x^2 e^x \quad \text{เมื่อ } y(1) = e$$

$$2.6 \quad x \frac{dy}{dx} + y + 3 = x^3 (y + 3)^3 \quad \text{เมื่อ } y\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

แบบฝึกหัดบทที่ 7

1. จงแสดงว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

1.1 $y = cx + \sqrt{1 - c^2}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของ $xy' + \sqrt{1 - (y')^2} = y$

1.2 $(x - c)^2 + y^2 = a^2$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของ $y^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = a^2$

1.3 $y^2 - x = 0$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ $y = 2x \frac{dy}{dx}$

1.4 $y = 4 + \frac{4}{x}$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ $x \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} = 0$

2. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $3(4y^2 + 1)dx = y(x - 1)dy$

3. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{1 + e^x}{1 - e^{-y}} dy + e^{x+y} dx = 0$

4. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\sqrt{x^2 + 1} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \quad \text{เมื่อ } y(\sqrt{3}) = 2$$

5. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

5.1 $xy' = x - y$

5.2 $(x^3 + y^3)dx + 2y^2xdy = 0$

5.3 $(\sin^2 x - 2y \cos x)y' + 2y \sin x \cos x + y^2 \sin x = 0$

5.4 $\frac{\ln y}{x} dx + \left(\frac{\ln x}{y} + \sin y \right) dy = 0$

5.5 $(xy - x^2)y' - xy + 1 = 0$

5.6 $x \frac{dy}{dx} + 3y = \frac{\sin x}{x^2}$

5.7 $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 3e^{2 \cos x}$

5.8 $x^2 y' + 3xy + 2x^5 = 0$

5.9 $(2y - 4) dx + dy = 0$

5.10 $y(1 + x^2 y) dx - x dy = 0$

5.11 $(y - \sin x) \cos x dx + \sin x dy = 0$

5.12 $\frac{1 + e^x}{1 - e^{-y}} dy + e^{x+y} dx = 0$

5.13 $(x^2 y + x^2) dx = (xy^2 - y^2) dy$

5.14 $(x^2 + 1)y' + y^2 + 1 = 0$

5.15 $(x^2 y^2 \sec x \tan x + xy^2 \sec x) dx + xy^3 dy = 0$

$$5.16 \quad \frac{3xy+1}{y}dx + \frac{2y-x}{y^2}dy = 0$$

$$5.17 \quad \pi y + (\pi x + \arcsin y) \frac{dy}{dx} = \sin x$$

$$5.18 \quad \frac{\ln y}{x} dx + \left(\frac{\ln x}{y} + \sin y \right) dy = 0$$

$$5.19 \quad (2xye^{x^2} + \sin y) dx + (x^2e^{x^2y} + x \cos y - y) dy = 0$$

6. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$6.1 \quad (e^y + ye^x)dx + (e^x + xe^y)dy = 0 \quad \text{เมื่อ } y(1) = 0$$

$$6.2 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y} \quad \text{เมื่อ } y(-1) = 0$$

$$6.3 \quad (y - e^x \sin x)dx + xdy = 0 \quad \text{เมื่อ } y(0) = 0$$

$$6.4 \quad x^2y' = 2x^2 - 2xy + y^2 \quad \text{เมื่อ } y(1) = 3$$

$$6.5 \quad (y - e^x \sin x)dx + dy = 0 \quad \text{เมื่อ } y(0) = -1$$

$$6.6 \quad \cos x \frac{dy}{dx} + y \sin x = 1 \quad \text{เมื่อ } y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$6.7 \quad \sin x \frac{dy}{dx} + y \cos x = \sec^2 x \quad \text{เมื่อ } y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

$$6.8 \quad x^2 \frac{dy}{dx} - 2xy = 3y^4 \quad \text{เมื่อ } y(1) = 1$$

$$6.9 \quad \ln(1+y^2) = \left(\frac{1}{y} - \frac{2xy}{1+y^2} \right) \frac{dy}{dx} \quad \text{เมื่อ } y(2) = \sqrt{e-1}$$

$$6.10 \quad y(1+x^2y) dx - x dy = 0 \quad \text{เมื่อ } y(1) = -1$$

$$6.11 \quad (x^2 + y) dx + (x^2 \cos y - x) dy = 0 \quad \text{เมื่อ } y(2) = 0$$

$$6.12 \quad 1 + (x \tan y - 2 \sec y) y' = 0 \quad \text{เมื่อ } y(-1) = \pi$$

$$6.13 \quad \frac{dy}{dx} + \frac{x^3 y}{x^4 + 1} = x^7 \quad \text{เมื่อ } y(0) = 1$$

$$6.14 \quad xy' + y = y^2 x^2 e^x \quad \text{เมื่อ } y(1) = e$$

$$6.15 \quad x \frac{dy}{dx} + y + 3 = x^3(y+3)^3 \quad \text{เมื่อ } y\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

7. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y}{x+2y}$$

8. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$(x^2 - 1) \frac{dy}{dx} + 2y = (x+1)^2(x-1) \quad \text{เมื่อ } y(0) = 1$$

9. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$(\sin^2 x - 2y \cos x) y' - 2y \sin x \cos x + y^2 \sin x = 0$$

$$\text{เมื่อ } y(0) = -2$$

บรรณานุกรม

ดำรง ทิพย์โยธา, ธีรยุทธ ไตรภพ และสรุชัย สมบัติบริบูรณ์. (2559). แคลคูลัส ๒.

กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ธนชัยศ จำปาหวาย. (2565). เอกสารคำสอนวิชาแคลคูลัส ๑. กรุงเทพฯ:

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

James Stewart. (2012). Calculus Early Transcendentals. Canada. Nelson Education, Ltd.

สรุปสูตรเกี่ยวกับแคลคูลัส

เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

1. $\sin x \csc x = 1$
2. $\cos x \sec x = 1$
3. $\cot x \tan x = 1$
4. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
5. $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$
6. $\csc^2 x - \cot^2 x = 1$
7. $\sin(-x) = -\sin x$
8. $\cos(-x) = \cos x$
9. $\tan(-x) = -\tan x$
10. $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
11. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
12. $\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$
13. $\sin(2x) = 2\sin x \cos x = \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$
14. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
 $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$
 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
15. $\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$
16. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
17. $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
18. $\tan^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$
19. $\tan x = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$
20. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$
21. $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$
22. $\sin^3 x = \frac{1}{4}[3\sin x - \sin 3x]$
23. $\cos^3 x = \frac{1}{4}[3\cos x + \cos 3x]$
24. $\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$
25. $\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
26. $\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
27. $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
28. $\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
29. $\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$
30. $\cos x \sin y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) - \sin(x-y)]$
31. $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$
32. $\sin x \sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

1. $\frac{d}{dx}C = 0$
2. $\frac{d}{dx}x = 1$
3. $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$
4. $(af)'(x) = af'(x)$
5. $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
6. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$
7. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$
8. $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$
9. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$
10. $\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$
11. $\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}$
12. $\frac{d}{dx} \log_a|x| = \frac{1}{x \ln a}$
13. $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$
14. $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$
15. $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$
16. $\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$
17. $\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$
18. $\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$
19. $\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
20. $\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
21. $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$
22. $\frac{d}{dx} \operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}$
23. $\frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
24. $\frac{d}{dx} \operatorname{arccsc} x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

ค่าเชิงอนุพันธ์

1. $dC = 0$
2. $d(u+v) = du + dv$
3. $d(ku) = kdu$
4. $u'dx = du$
5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$
6. $d(uv) = vdu + u dv$
7. $df(x, y) = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$

ปริพันธ์ของฟังก์ชัน

1. $\int af(x)dx = a \int f(x)dx$
2. $\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
3. $\int kdx = kx + C$
4. $\int vdu = uv - \int vdu$
5. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
6. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
7. $\int e^x dx = e^x + C$
8. $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$
9. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
10. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
11. $\int \cos x dx = \sin x + C$
12. $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
13. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$
14. $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
15. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$
16. $\int \tan x dx = \ln|\sec x| + C$
17. $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$
18. $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$
19. $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

20. $\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C$
21. $\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C$
22. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$
23. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$
24. $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcsec} x + C$
25. $\int \ell n x dx = x \ell n x - x + C$
26. $\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C$
27. $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C$
28. $\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$
29. $\int \arccos x dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$
30. $\int \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ell n(1+x^2) + C$
31. $\int \operatorname{arccot} x dx = x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2} \ell n(1+x^2) + C$
32. $\int \operatorname{arcsec} x dx = x \operatorname{arcsec} x - \ell n|x + \sqrt{x^2-1}| + C$
33. $\int \operatorname{arccsc} x dx = x \operatorname{arccsc} x + \ell n|x + \sqrt{x^2-1}| + C$

บรรณานุกรม

ดำรง ทิพย์โยธา, ธีรยุทธ ไตรภพ และสุชัย สมบัติบริบูรณ์. (2559). แคลคูลัส ๒.

กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ธัญยศ จำปาหวาย. (2565). เอกสารคำสอนวิชาแคลคูลัส ๑. กรุงเทพฯ:

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

James Stewart. (2012). Calculus Early Transcendentals. Canada. Nelson Education, Ltd.

ประวัติผู้เขียน



ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธัญยศ จำปาหวาย

- ปัจจุบันดำรงตำแหน่งผู้ช่วยศาสตราจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
- ปริญญาเอก วิทยาศาสตร์ดุษฎีบัณฑิต (คณิตศาสตร์), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2557 Ph.D. (Mathematics), Chulalongkorn University, 2014
- ปริญญาโท วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2552 M.Sc. (Mathematics), Chulalongkorn University, 2009
- ปริญญาตรี วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์, เกียรตินิยมอันดับสอง), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2549 B.Sc. (Mathematics, 2nd class honours), Chulalongkorn University, 2006
- ปัจจุบันดำรงตำแหน่งผู้ช่วยศาสตราจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

Email: thanatyod.ja@ssru.ac.th

Office: 1144

Facebook: www.facebook.com/Jampawai

Block: www.eledu.ssru.ac.th/thanatyod_ja

ผลงานทางวิชาการ

ธัญยศ จำปาหวาย. (2566). **แคลคูลัส 1**. www.mebmarket.com.

ธัญยศ จำปาหวาย. (2566). **แคลคูลัส 2**. www.mebmarket.com.

ธัญยศ จำปาหวาย. (2565). **พีชคณิตนามธรรม**. www.mebmarket.com.

ธัญยศ จำปาหวาย. (2565). **ทฤษฎีจำนวน**. www.mebmarket.com.

ธัญยศ จำปาหวาย. (2565). **หลักการคณิตศาสตร์สำหรับครู**. www.mebmarket.com.

ธัญยศ จำปาหวาย. (2565). **ความน่าจะเป็นและสถิติ**. www.mebmarket.com.

ธัญยศ จำปาหวาย. (2560). **ความจริงที่ต้องพิสูจน์**. มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา.