คณิตศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ข้อสอบปลายภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2568

รหัสวิชา	**ชื่อวิชา**	**วันเวลาสอบ**	**คะแนนเต็ม**
MAI1303	แคลคูลัส ๒	เวลา 13:00 - 16:00 วันอังคาร ที่ 4 พฤศจิกายน 2568	100 คะแนน 25%

ชื่อ-สกุล.. **รหัสนักศึกษา**................................ **หมู่เรียน**................

คำชี้แจง

1. ข้อสอบมี 18 ข้อ 15 หน้า แบ่งออกเป็น 3 ตอน ประกอบด้วย
   - **ตอนที่ 1** ข้อสอบแบบ 5 ตัวเลือกจำนวน 5 ข้อ (ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)
   - **ตอนที่ 2** ข้อสอบแบบเติมคำตอบจำนวน 5 ข้อ (ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)
   - **ตอนที่ 3** ข้อสอบแบบแสดงวิธีทำจำนวน 8 ข้อ (ข้อละ 10 คะแนน รวม 80 คะแนน)
2. เขียนรหัสนักศึกษา และหมู่เรียนด้วย**ตัวบรรจงลงในข้อสอบทุกหน้า**
3. ไม่อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณและเครื่องมือสื่อสาร
4. **อนุญาต**ให้นำกระดาษที่เขียนด้วยตัวเอง 1 แผ่น ขนาด A4
5. **ห้าม**นำข้อสอบออกจากห้องสอบโดยเด็ดขาด
6. หากมี**การทุจริต**ในการสอบ จะได้รับการลงโทษตามระเบียบของมหาวิทยาลัย

ข้าพเจ้าจะปฏิบัติตามข้อตกลงอย่างเคร่งครัด
ลงชื่อผู้เข้าสอบ

....

อาจารย์ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ตอนที่	1	2	3								รวม
ข้อ	1-5	6-10	11	12	13	14	15	16	17	18	
คะแนน											

ตอนที่ 1 : (10 คะแนน) จงกากบาททับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. ให้ $A(2, -\frac{\pi}{4})$ เป็นจุดในระบบพิกัดเชิงขั้ว แล้ว A ตรงกับจุดใดในระบบพิกัดฉาก

ก. $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

ข. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

ค. $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

ง. $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

จ. $(2, \frac{7\pi}{4})$

2. เมื่อแปลงสมการ

$$(r + \sin\theta)^2 + \cos^2\theta = 0$$

ให้อยู่ในระบบพิกัดฉาก จะตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. $x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0$

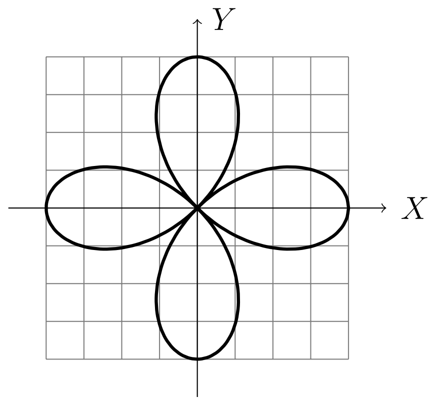
ข. $x^2 + y^2 + 2x + 1 = 0$

ค. $x^2 + y^2 + 2y = 0$

ง. $x^2 + y^2 + 2x = 0$

จ. $x^2 + y^2 - 2y = 0$

3. ข้อใดคือสมการของกราฟต่อไปนี้



ก. $r = 4\sin 2\theta$

ข. $r = 4\cos 2\theta$

ค. $r = 2\cos 2\theta$

ง. $r = 2\sin 2\theta$

จ. $r = 4\sin\theta$

4. สมการเชิงอนุพันธ์ใดต่อไปนี้มีผลเฉลยเฉพาะคือ $x = r\cos\theta$

ก. $\dfrac{\partial x}{\partial \theta} - \dfrac{\partial^2 x}{\partial r^2} = 0$

ข. $r\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial^2 x}{\partial r^2} = 0$

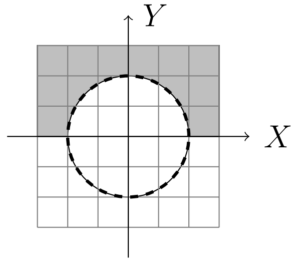
ค. $r\dfrac{\partial x}{\partial \theta} - \dfrac{\partial^2 x}{\partial r^2} = 0$

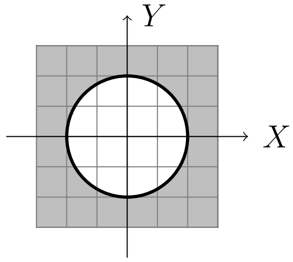
ง. $\dfrac{\partial x}{\partial \theta} - r\dfrac{\partial^2 x}{\partial r^2} = 0$

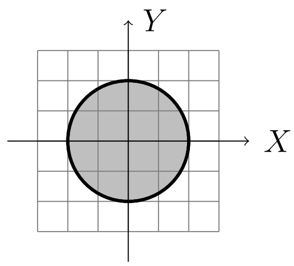
จ. $\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + r\dfrac{\partial^2 x}{\partial r^2} = 0$

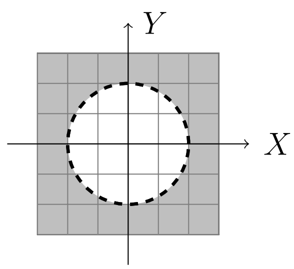
5. กราฟข้อใดแสดงโดเมนของฟังก์ชัน

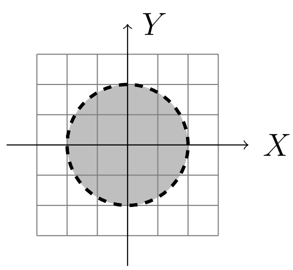
$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

ก. 

ข. 

ค. 

ง. 

จ. 

ตอนที่ 2 : (10 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายบน) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

6. ____________________

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2-y^2-x+y}{x+y-1}$$ มีค่าเท่าใด

7. ____________________

กำหนดให้ $f(x,y)=x^3\ln y$ จงหาค่าของ $f_{xy}(1,1)$

8. ____________________

จงใช้**ค่าเชิงอนุพันธ์**ประมาณค่า $\sqrt{1.02}+\sqrt[3]{1.03}$ (ตอบในรูปทศนิยม 2 ตำแหน่ง)

9. ____________________

ปริพันธ์สองชั้น $\int_0^1\int_{-1}^1 3(x-y)^2\,dxdy$ มีค่าเท่าใด

10. ______________________

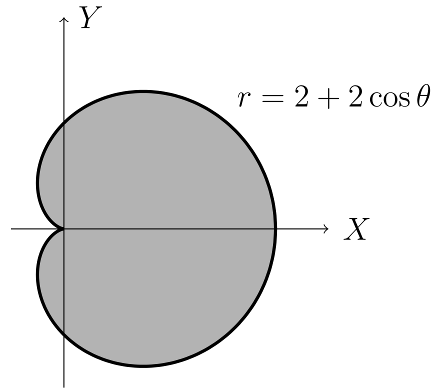
กำหนดให้ $f(x,y) = 3(x+y)$ กำหนดให้อาณาบริเวณ ในระบบพิกัดเชิงขั้วคือ

$$D = \{(r,\theta) : 0 \le r \le 1 \text{ และ } 0 \le \theta \le \pi\}$$

จงหาค่าของ $\displaystyle\iint_D f$

ตอนที่ 3 : (80 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

11. **(10 คะแนน)** จงหาพื้นที่แรเงาต่อไปนี้โดยใช้**ปริพันธ์ในรูปเชิงขั้ว**



12. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

12.1 **(5 คะแนน)** จงแสดงว่าลิมิต $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ หาค่าไม่ได้

ข้อเสนอแนะ: ใช้ลิมิตตามเส้นโค้ง

12.2 **(5 คะแนน)** จงแสดงว่า

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$$

13. **(10 คะแนน)** กำหนดให้

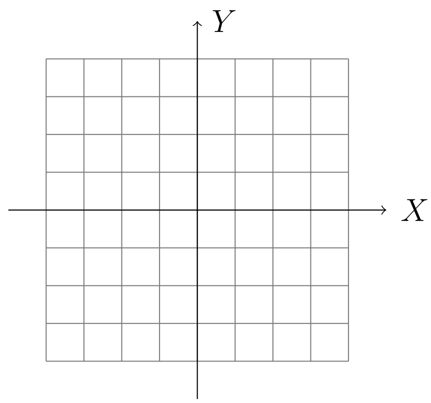
$$u = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad \text{และ} \quad x = st, \quad y = s + t$$

จงหาค่าของ $\dfrac{\partial u}{\partial s} + \dfrac{\partial u}{\partial t}$ ที่ $(s,t) = (1,1)$

14. **(10 คะแนน)** จง**วาดกราฟแสดงโดเมน**ของปริพันธ์สองชั้นต่อไปนี้

$$\int_{-3}^{3}\int_{0}^{3-|x|} f(x,y)\,dydx$$

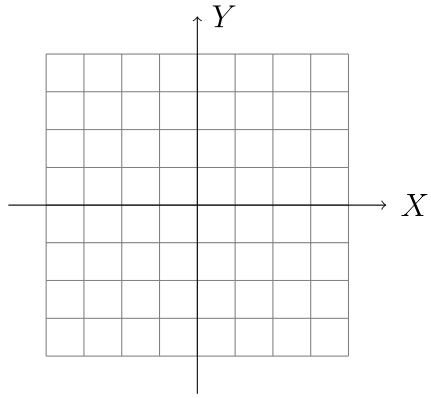
และ**เปลี่ยนลำดับการปริพันธ์**



15. **(10 คะแนน)** จง**วาดกราฟแสดงโดเมน**ของปริพันธ์สองชั้นต่อไปนี้

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$$

และหาค่าของปริพันธ์ดังกล่าวโดยใช้**รูปแบบเชิงขั้ว**



16. **(10 คะแนน)** จงหา**ผลเฉลยทั่วไป**ของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

16.1 **(5 คะแนน)** $y(x+1)dx - xdy = 0$

ข้อเสนอแนะ : สมการแบบแยกตัวแปรได้

16.2 **(5 คะแนน)** $(x+y^2)dx + 2xydy = 0$

ข้อเสนอแนะ : สมการแม่นตรง

17. **(10 คะแนน)** จงหา**ผลเฉลยเฉพาะ**ของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$(2x + 3y)dx + 4xdy = 0$$

เมื่อ $y(1) = 0$

ข้อเสนอแนะ : สมการเอกพันธุ์หรือตัวประกอบปริพันธ์

18. **(10 คะแนน)** จงหา**ผลเฉลยเฉพาะ**ของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$x\frac{dy}{dx} + y = xe^{x^2}$$

เมื่อ $y(1) = 0$

ข้อเสนอแนะ : สมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
เฉลยข้อสอบปลายภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2568

รหัสวิชา	ชื่อวิชา	วันเวลาสอบ	คะแนนเต็ม
MAI1303	แคลคูลัส ๒	เวลา 13:00 - 16:00 วันอังคาร ที่ 4 พฤศจิกายน 2568	100 คะแนน 25%

โดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

ตอนที่ 1 : (10 คะแนน) จงกากบาททับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 2 คะแนน

1. ให้ $A(2, -\frac{\pi}{4})$ เป็นจุดในระบบพิกัดเชิงขั้ว แล้ว A ตรงกับจุดใดในระบบพิกัดฉาก

   ก. $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$
   ข. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
   ค. $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ Answer
   ง. $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$
   จ. $(2, \frac{7\pi}{4})$

   ตอบข้อ ค. เนื่องจาก

   $$x = 2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \text{ และ } y = 2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

   ดังนั้น A ตรงกับจุด $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ในระบบพิกัดฉาก

2. เมื่อแปลงสมการ

   $$(r + \sin\theta)^2 + \cos^2\theta = 0$$

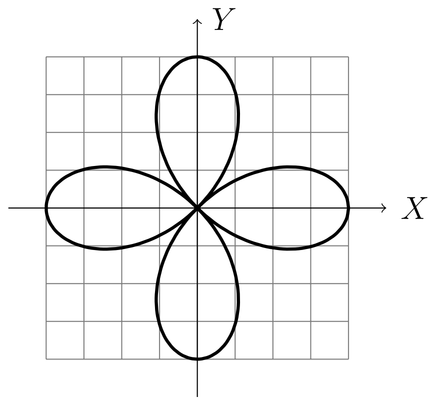
   ให้อยู่ในระบบพิกัดฉาก จะตรงกับข้อใดต่อไปนี้

   ก. $x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0$ Answer
   ข. $x^2 + y^2 + 2x + 1 = 0$
   ค. $x^2 + y^2 + 2y = 0$
   ง. $x^2 + y^2 + 2x = 0$
   จ. $x^2 + y^2 - 2y = 0$

   ตอบข้อ ก. กำหนดให้ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ และ $x^2 + y^2 = r^2$ จะได้ว่า

   $$\begin{aligned} r^2 + 2r\sin\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta &= 0 \\ r^2 + 2(r\sin\theta) + 1 &= 0 \\ x^2 + y^2 + 2y + 1 &= 0 \end{aligned}$$

3. ข้อใดคือสมการของกราฟต่อไปนี้



ก. $r = 4\sin 2\theta$

ข. $r = 4\cos 2\theta$ Answer

ค. $r = 2\cos 2\theta$

ง. $r = 2\sin 2\theta$

จ. $r = 4\sin\theta$

ตอบข้อ ข. กราฟกลีบกุหลาบ $4n$ กลีบโดยกลีบอยู่บนแกน X และมีความยาวดอก k หน่วย คือ $r = k\cos 2n\theta$ (ในกรณีนี้ $n = 1$ และ $k = 4$)

4. สมการเชิงอนุพันธ์ใดต่อไปนี้มีผลเฉลยเฉพาะคือ $x = r\cos\theta$

ก. $\dfrac{\partial x}{\partial \theta} - \dfrac{\partial^2 x}{\partial r^2} = 0$

ข. $r\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial^2 x}{\partial r^2} = 0$

ค. $r\dfrac{\partial x}{\partial \theta} - \dfrac{\partial^2 x}{\partial r^2} = 0$

ง. $\dfrac{\partial x}{\partial \theta} - r\dfrac{\partial^2 x}{\partial r^2} = 0$ Answer

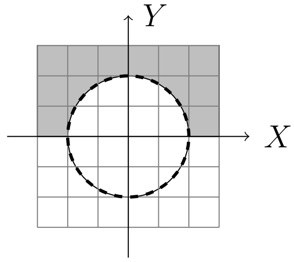
จ. $\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + r\dfrac{\partial^2 x}{\partial r^2} = 0$

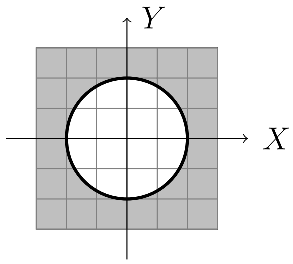
ตอบข้อ ง. เนื่องจาก

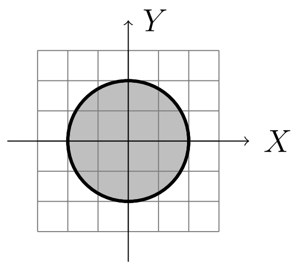
$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial \theta} - r\frac{\partial^2 x}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta}(r\cos\theta) - r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\cos\theta)\right) \\
&= -r\sin\theta - r\frac{\partial}{\partial r}(\cos\theta) \\
&= -r\sin\theta - r(-\sin\theta) \\
&= -r\sin\theta + r\sin\theta = 0
\end{aligned}$$

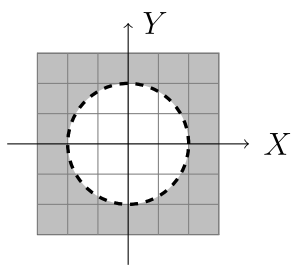
5. กราฟข้อใดแสดงโดเมนของฟังก์ชัน

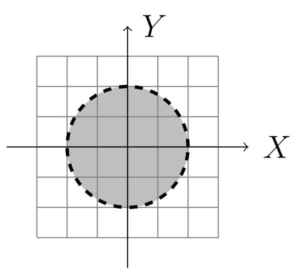
$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

ก. 

ข. 

ค. 

ง. 

จ. 

ตอบข้อ จ. จะเห็นว่า f หาค่าได้ก็ต่อเมื่อ $4 - x^2 - y^2 > 0$ หรือ $x^2 + y^2 < 4$ ดังนั้น

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$$

โดเมนคือรูปพื้นที่ภายในวงกลม 2 หน่วย ที่ไม่เอาขอบวงกลม

ตอนที่ 2 : (10 คะแนน) จงเติมคำตอบในช่องว่าง (ด้านซ้ายบน) ให้ถูกต้อง ข้อละ 2 คะแนน

6. ตอบ 1

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2-y^2-x+y}{x+y-1}$$ มีค่าเท่าใด

แนวคำตอบ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2-y^2-x+y}{x+y-1} \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-y)(x+y)-(x-y)}{x+y-1} \\ &= \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-y)[(x+y)-1]}{x+y-1} \\ &= \lim_{(x,y)\to(1,0)} (x-y) = 1-0 = 1 \quad \#\end{aligned}$$

7. ตอบ 3

กำหนดให้ $f(x,y) = x^3 \ln y$ จงหาค่าของ $f_{xy}(1,1)$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3x^2 \ln y \\ f_{xy}(x,y) &= 3x^2 \cdot \frac{1}{y} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$f_{xy}(1,1) = 3(1^2)\cdot\frac{1}{1} = 3 \quad \#$$

8. ตอบ 2.02

จงใช้**ค่าเชิงอนุพันธ์**ประมาณค่า $\sqrt{1.02} + \sqrt[3]{1.03}$

แนวคำตอบ กำหนดให้ $f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{y}$ จะได้ว่า

$$f_x(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{และ} \qquad f_y(x,y) = \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}$$

ประมาณค่าที่ $x = 1, y = 1$ และ $dx = 0.02,\ dy = 0.03$ โดย

$$\begin{aligned} \sqrt{1.02} + \sqrt[3]{1.03} &= f(1.02, 1.03) = f(1+0.02, 1+0.03) \\ &\approx f(1,1) + f_x(1,1)dx + f_y(1,1)dy \\ &= (1+1) + \frac{1}{2\sqrt{1}}\cdot 0.02 + \frac{1}{3}\cdot 1^{-\frac{2}{3}}(0.03) \\ &= 2 + 0.01 + 0.01 \\ &= 2.02 \quad \# \end{aligned}$$

9. ตอบ 4

ปริพันธ์สองชั้น $\int_0^1 \int_{-1}^1 3(x-y)^2\,dxdy$ มีค่าเท่าใด

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_{-1}^1 3(x-y)^2\,dxdy &= \int_0^1 \int_{-1}^1 3(x^2-2xy+y^2)\,dxdy\\ &= \int_0^1 \int_{-1}^1 3x^2-6xy+3y^2\,dxdy\\ &= \int_0^1 \left[x^3-3x^2y+3y^2x\right]_{x=-1}^{x=1} dy\\ &= \int_0^1 \left[1-3y+3y^2\right]-\left[-1-3y-3y^2\right] dy\\ &= \int_0^1 2+6y^2\,dy\\ &= [2y+2y^3]_0^1 = (2+2)-0 = 4 \quad \#\end{aligned}$$

10. ตอบ 2

กำหนดให้ $f(x,y)=3(x+y)$ กำหนดให้อาณาบริเวณ ในระบบพิกัดเชิงขั้วคือ

$$D = \{(r,\theta) : 0 \le r \le 1 \text{ และ } 0 \le \theta \le \pi\}$$

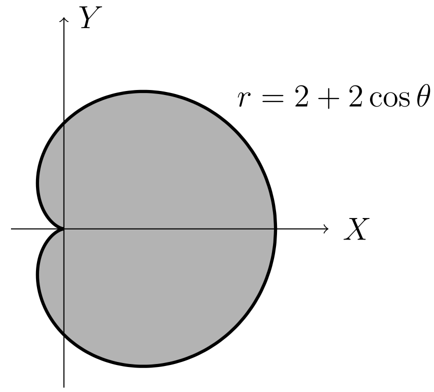
จงหาค่าของ $\iint\limits_D f$

แนวคำตอบ พิจารณา $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f &= \iint\limits_D 3(x+y)\,dxdy\\ &= \int_0^1 \int_0^\pi 3(r\cos\theta + r\sin\theta)r d\theta dr\\ &= \int_0^1 \int_0^\pi 3r^2\cos\theta + 3r^2\sin\theta d\theta dr\\ &= \int_0^1 \left[3r^2\sin\theta - 3r^2\cos\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} dr\\ &= \int_0^1 \left[0+3r^2\right]-[0-3r^2]dr\\ &= \int_0^1 6r^2\,dr\\ &= [2r^3]_0^1 = 2-0 = 2 \quad \#\end{aligned}$$

ตอนที่ 3 : (80 คะแนน) จงแสดงวิธีโดยละเอียด ข้อละ 10 คะแนน

11. **(10 คะแนน)** จงหาพื้นที่แรเงาต่อไปนี้โดยใช้**ปริพันธ์ในรูปเชิงขั้ว**



แนวคำตอบ จากกราฟพื้นที่ที่แรเงาคือพื้นที่ปิดล้อมด้วย $r = 2+2\cos\theta$ จาก 0 ถึง 2π ดังนั้นพื้นที่ที่แรเงาเท่ากับ

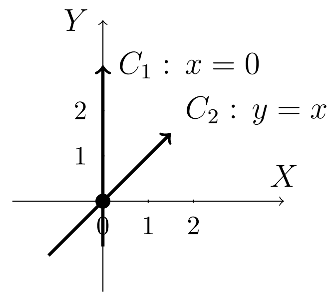
$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(2+2\cos\theta)^2 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left[4+8\cos\theta+4\cos^2\theta\right] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 2+4\cos\theta+2\cos^2\theta d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 2+4\cos\theta+2\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 2+4\cos\theta+(1+\cos 2\theta) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 3+4\cos\theta+\cos 2\theta d\theta \\
&= \left[3\theta+4\sin\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi} \\
&= [6\pi+0+0]-0 \\
&= 6\pi \quad \#
\end{aligned}$$

12. **(10 คะแนน)** จงตอบคำถามต่อไปนี้

12.1 **(5 คะแนน)** จงแสดงว่าลิมิต $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ หาค่าไม่ได้

ข้อเสนอแนะ: ใช้ลิมิตตามเส้นโค้ง

แนวคำตอบ พิจารณาเส้นโค้งที่ผ่านจุด $(0,0)$ คือ $C_1 : x = 0$ และ $C_2 : y = x$



บน $C_1 : x = 0$ จะได้

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{บน}C_1}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{บน}C_1}} \frac{0\cdot y}{0^2+y^2} = \lim_{\substack{y\to 0\\ \text{บน}C_1}} \frac{0}{y^2} = 0$$

บน $C_2 : y = x$ จะได้

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{บน}C_2}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{บน}C_2}} \frac{x\cdot x}{x^2+x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ \text{บน}C_2}} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

เนื่องจากลิมิตบน C_1 และ C_2 มีค่าไม่เท่ากัน ดังนั้น $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ หาค่าไม่ได้

12.2 **(5 คะแนน)** จงแสดงว่า

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$$

แนวคำตอบ

$$\text{ให้} \quad f(x,y) = \frac{y^2}{x^2+y^2} \qquad \text{และ} \qquad g(x,y) = x$$

เนื่องจาก $x^2 \geq 0$ นั่นคือ $x^2 + y^2 \geq y^2$ ดังนั้น $\dfrac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1$ สำหรับ $(x,y) \neq (0,0)$ แล้ว

$$|f(x,y)| = \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1 \quad \text{สำหรับ } (x,y) \neq (0,0)$$

และ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$ ดังนั้น

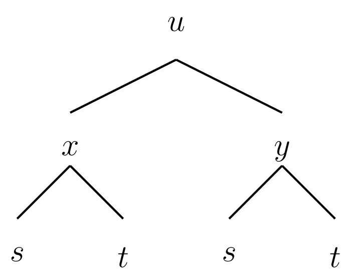
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0 \quad \#$$

13. **(10 คะแนน)** กำหนดให้

$$u = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad \text{และ} \quad x = st, \quad y = s + t$$

จงหาค่าของ $\dfrac{\partial u}{\partial s} + \dfrac{\partial u}{\partial t}$ ที่ $(s, t) = (1, 1)$

แนวคำตอบ พิจารณาแผนภาพ



$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial s}(st) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial s}(s+t) \\
&= \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}\right) \cdot t + \left(-\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}\right) \cdot 1
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial t}(st) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial t}(s+t) \\
&= \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}\right) \cdot s + \left(-\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}\right) \cdot 1
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $s = 1$ และ $t = 1$ จะได้ว่า $x = 1 \cdot 1 = 1$ และ $y = 1 + 1 = 2$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial s}(1,1) + \frac{\partial u}{\partial t}(1,1) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{1^2}\right) \cdot 1 + \left(-\frac{1}{2^2} + \frac{1}{1}\right) \cdot 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{1^2}\right) \cdot 1 + \left(-\frac{1}{2^2} + \frac{1}{1}\right) \cdot 1 \\
&= -\frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \\
&= -3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} \quad \#
\end{aligned}$$

14. **(10 คะแนน) จงวาดกราฟแสดงโดเมน**ของปริพันธ์สองชั้นต่อไปนี้

$$\int_{-3}^{3}\int_{0}^{3-|x|} f(x,y)\,dydx$$

และเปลี่ยนลำดับการปริพันธ์

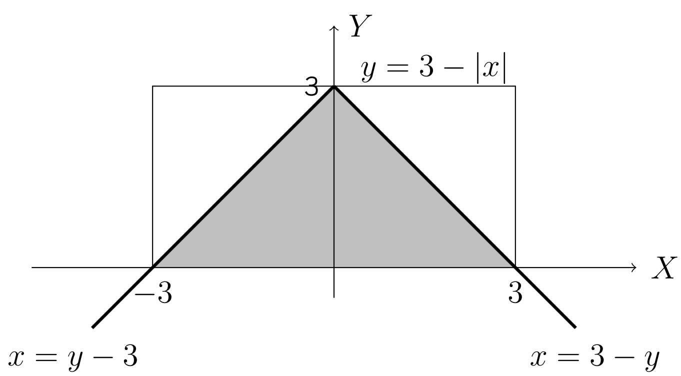
แนวคำตอบ จากปริพันธ์สองชั้นโดเมนคือ

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -3 \le x \le 3 \text{ และ } 0 \le y \le 3 - |x|\}$$

พิจารณา $y = 3 - |x|$ จะได้ว่า $|x| = 3 - y$ นั่นคือ

$$x = 3 - y \text{ ถ้า } x > 0 \qquad \text{และ} \qquad -x = 3 - y \text{ ถ้า } x < 0$$

แสดงกราฟได้ดังนี้



จะได้ว่า

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 3 \text{ และ } y - 3 \le x \le 3 - y\}$$

ดังนั้น

$$\int_{-3}^{3}\int_{0}^{3-|x|} f(x,y)\,dydx = \int_{0}^{3}\int_{y-3}^{3-y} f(x,y)\,dxdy \quad \#$$

15. **(10 คะแนน)** จง**วาดกราฟแสดงโดเมน**ของปริพันธ์สองชั้นต่อไปนี้

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$$

และหาค่าของปริพันธ์ดังกล่าวโดยใช้**รูปแบบเชิงขั้ว**

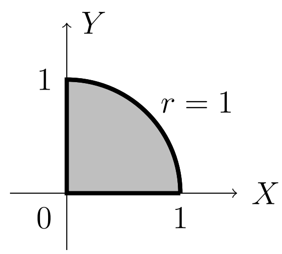
แนวคำตอบ จากปริพันธ์สองชั้นโดเมนคือ

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1 \text{ และ } 0 \le x \le \sqrt{1-y^2}\}$$

พิจารณา $x = \sqrt{1-y^2}$ จะได้ว่า $x^2 = 1 - y^2$ หรือ

$$y^2 + x^2 = 1 \text{ เมื่อ } x \ge 0 \text{ และ } y \ge 0$$

แสดงกราฟได้ดังนี้



ขอบเขตของ r หาได้จาก 0 ถึง $x^2 + y^2 = 1$ นั่นคือจาก $r = 0$ ถึง $r = 1$
ขอบเขตของ θ จาก $y = 0$ ถึง $x = 0$ นั้นคือ $[0, \frac{\pi}{2}]$ ดังนั้นโดเมนในระบบพิกัดเชิงขั้วคือ

$$D = \left\{(r,\theta) : 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \text{ และ } 0 \le r \le 1\right\}$$

เปลี่ยนตัวแปร $x^2 + y^2 = r^2$ และ $dxdy$ เป็น $rdrd\theta$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r \cdot rdrd\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2\, drd\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}\, d\theta \\
&= \left[\frac{1}{3}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6} \qquad \#
\end{aligned}$$

16. **(10 คะแนน)** จงหา**ผลเฉลยทั่วไป**ของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

16.1 **(5 คะแนน)** $y(x+1)dx - xdy = 0$

ข้อเสนอแนะ : สมการแบบแยกตัวแปรได้

แนวคำตอบ เป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ ดังนั้น

$$\begin{aligned} y(x+1)dx &= xdy \\ \frac{x+1}{x}dx &= \frac{1}{y}dy \\ \int 1 + \frac{1}{x}dx &= \int \frac{1}{y}dy \\ x + \ln|x| &= \ln|y| + C \end{aligned}$$

ดังนั้น $x + \ln|x| = \ln|y| + C$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการนี้

16.2 **(5 คะแนน)** $(x+y^2)dx + 2xydy = 0$

ข้อเสนอแนะ : สมการแม่นตรง

แนวคำตอบ ให้ $M(x,y) = x + y^2$ และ $N(x,y) = 2xy$ จะได้ว่า

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

จะได้ว่า $(x+y^2)dx + 2xydy = 0$ เป็นสมการแม่นตรงที่มี $F(x,y) = C$ เป็นผลเฉลยทั่วไป

<u>วิธีที่ 1</u> ใช้ $Mdx + Ndy = F_x dx + F_y dy = dF = 0$

จาก $F_x = M$ จะได้ว่า

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx = \int x + y^2\,dx = \frac{1}{2}x^2 + y^2x + C(y)$$

จาก $F_y = N$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}x^2 + y^2x + C(y)\right) &= 2xy + C'(y) = 2xy \\ C'(y) &= 0 \\ C(y) &= c_1 \end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการนี้คือ

$$\frac{1}{2}x^2 + y^2x = C \quad \#$$

<u>วิธีที่ 2</u> ใช้สมบัติค่าเชิงอนุพันธ์ $df = f_x dx + f_y dy$

$$\begin{aligned} (x+y^2)dx + 2xydy &= 0 \\ xdx + y^2dx + 2xydy &= 0 \\ xdx + d(xy^2) &= 0 \\ \int xdx + \int d(xy^2) &= C \\ \frac{1}{2}x^2 + xy^2 &= C \end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการนี้คือ

$$\frac{1}{2}x^2 + xy^2 = C \quad \#$$

17. **(10 คะแนน)** จงหา**ผลเฉลยเฉพาะ**ของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$(2x+3y)dx + 4xdy = 0$$

เมื่อ $y(1) = 0$

ข้อเสนอแนะ : สมการเอกพันธ์ุหรือตัวประกอบปริพันธ์

แนวคำตอบ ให้ $M(x,y) = 2x+3y$ และ $N(x,y) = 4x$

วิธีที่ 1 ใช้วิธีเอกพันธ์ุ พิจารณา

$$M(\lambda x, \lambda y) = 2(\lambda x) + 3(\lambda y) = \lambda(2x+3y) = \lambda M(x,y)$$
$$N(\lambda x, \lambda y) = 4(\lambda x) = \lambda(4x) = \lambda N(x,y)$$

ดังนั้น $(2x+3y)dx + 4xdy = 0$ เป็นสมการเอกพันธ์ุดีกรีสอง

ให้ $y = vx$ จะได้ว่า $dy = vdx + xdv$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
(2x+3(vx))dx + 4x(vdx+xdv) &= 0 \\
(2x+3xv)dx + 4xvdx + 4x^2dv &= 0 \\
(2x+7xv)dx &= -4x^2dv \\
x(2+7v)dx &= -4x^2dv \\
\frac{x}{x^2}dx &= -\frac{4}{2+7v}dv \\
\int \frac{1}{x}dx &= -\int \frac{4}{2+7v}dv \\
\ln|x| &= -\frac{4}{7}\ln|2+7v| + C = -\frac{4}{7}\ln\left|2+7\left(\frac{y}{x}\right)\right| + C
\end{aligned}$$

แทนค่า $x = 1$ และ $y = 0$ จะได้ว่า

$$0 = -\frac{4}{7}\ln 2 + C$$
$$C = \frac{4}{7}\ln 2$$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะของสมการนี้คือ

$$\ln|x| = -\frac{4}{7}\ln\left|2+7\left(\frac{y}{x}\right)\right| + \frac{4}{7}\ln 2 \quad \#$$

หรืออาจจัดรูปได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
-\frac{7}{4}\ln|x| &= \ln\left|2+\frac{7y}{x}\right| - \ln 2 \\
\ln|x^{-\frac{7}{4}}| &= -4\ln\left|2+\frac{7y}{x}\right| + \ln 2^{-1} \\
x^{-\frac{7}{4}} &= e^{\ln\left|2+\frac{7y}{x}\right| + \ln\frac{1}{2}} = e^{\ln\left|2+\frac{7y}{x}\right|}\cdot e^{\ln\frac{1}{2}} \\
x^{-\frac{7}{4}} &= \left(2+\frac{7y}{x}\right)\cdot\frac{1}{2} \\
2x^{-\frac{3}{4}} = 2x\cdot x^{-\frac{7}{4}} &= 2x+7y \\
2 &= 2x\cdot x^{\frac{3}{4}} + 7x^{\frac{3}{4}}y \\
2 &= 2x^{\frac{7}{4}} + 7x^{\frac{3}{4}}y \quad \#
\end{aligned}$$

วิธีที่ 2 ตัวประกอบปริพันธ์ พิจารณา

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \\ &= \frac{1}{4x}(3-4) = -\frac{1}{4x} \end{aligned}$$

จะได้ตัวประกอบปริพันธ์คือ

$$\mu = e^{\int f(x)dx} = e^{\int -\frac{1}{4x}dx} = e^{-\frac{1}{4}\ln x} = x^{-\frac{1}{4}}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} x^{-\frac{1}{4}}(2x+3y)dx + x^{-\frac{1}{4}} \cdot 4xdy &= 0 \\ (2x^{\frac{3}{4}} + 3x^{-\frac{1}{4}}y)dx + 4x^{\frac{3}{4}}dy &= 0 \\ 2x^{\frac{3}{4}}dx + (3x^{-\frac{1}{4}}ydx + 4x^{\frac{3}{4}}dy) &= 0 \\ 2x^{\frac{3}{4}}dx + d\left(4x^{\frac{3}{4}}y\right) &= 0 \\ \int 2x^{\frac{3}{4}}dx + \int d\left(4x^{\frac{3}{4}}y\right) &= C \\ \frac{8}{7}x^{\frac{7}{4}} + 4x^{\frac{3}{4}}y &= C \\ 8x^{\frac{7}{4}} + 28x^{\frac{3}{4}}y &= 7C \end{aligned}$$

แทนค่า $x = 1$ และ $y = 0$ จะได้ว่า

$$8 + 0 = 7C$$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะของสมการนี้คือ $8x^{\frac{7}{4}} + 28x^{\frac{3}{4}}y = 8$ หรือ

$$2x^{\frac{7}{4}} + 7x^{\frac{3}{4}}y = 2 \quad \#$$

18. **(10 คะแนน)** จงหา**ผลเฉลยเฉพาะ**ของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$x\frac{dy}{dx} + y = xe^{x^2}$$

เมื่อ $y(1) = 0$

ข้อเสนอแนะ : สมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง

แนวคำตอบ จัดรูปสมการใหม่

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} \cdot y = e^{x^2}$$

ฉะนั้นเป็นสมการเชิงเส้นที่มี $P(x) = \frac{1}{x}$ และ $Q(x) = e^{x^2}$ จะได้ว่า

$$\mu = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการนี้คือ

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\mu}\left(\int \mu Q(x)dx + C\right) \\ y &= \frac{1}{x}\left(\int x \cdot e^{x^2} dx + C\right) \\ &= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}e^{x^2} + C\right) && (u = x^2) \end{aligned}$$

แทนค่า $x = 1$ และ $y = 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}e + C\right) \\ C &= -\frac{e}{2} \end{aligned}$$

ผลเฉลยของเฉพาะของสมการนี้คือ

$$y = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{e}{2}\right) \quad \#$$