เมทริกซ์

เมทริกซ์ (Matrix)

หลักการ *เมทริกซ์ คือ ชุดของจำนวน ซึ่งเรียงกันอยู่ในลักษณะรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและถูกปิดล้อมด้วยเครื่องหมาย [ ] หรือ ( ) ดังนี้*

$$
A = \begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\
 & & \vdots & & \\
a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix}
\begin{array}{l}
\leftarrow \text{แถวที่ 1} \\
\leftarrow \text{แถวที่ 2} \\
\leftarrow \text{แถวที่ 3} \\
 \\
\leftarrow \text{แถวที่ m}
\end{array} \\
\begin{array}{ccccc}
\uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\
\text{หลักที่ 1} & \text{หลักที่ 2} & \text{หลักที่ 3} & & \text{หลักที่ n}
\end{array}
\end{array}
$$

เมื่อ A แทน เมทริกซ์

และ a_{ij} ถูกเรียกว่า สมาชิกของ A ที่อยู่ในแถวที่ i หลักที่ j หรือเรียกว่า สมาชิกในตำแหน่ง ij

โดยที่ $i \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ และ $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

<u>*สามารถเขียน A ให้สั้นลงได้ดังนี้*</u>

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

เช่น $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ สามารถเขียน A ให้สั้นลงได้คือ $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$

◎◎ ตัวอย่างของเมทริกซ์

1. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -5 & 0 \\ 1 & 7 & -3 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 & 7 \\ -5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & -3 \end{bmatrix}$

---

1. $\begin{bmatrix} 7 & \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ไม่ถือว่าเป็นเมทริกซ์เนื่องจากมีตำแหน่งที่ว่าง
2. ชุดของจำนวน ซึ่งเรียงกันอยู่ในลักษณะรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าอาจไม่ใช่จำนวนจริงก็ได้ เช่น $\begin{bmatrix} 3i & 2 \\ 0 & 5i \end{bmatrix}$
3. จำนวนแต่ละจำนวนในเมทริกซ์ถูกเรียกว่าสมาชิก (Element) ของเมทริกซ์นั้น
4. ถ้ามีการสลับที่สมาชิกที่ไม่เท่ากันคู่ใดคู่หนึ่ง แล้วจะได้เมทริกซ์ที่ต่างไปจากเดิม

การระบุตำแหน่งของสมาชิกของเมทริกซ์

หลักการ

1. จำนวนที่ประกอบกันเป็นแนวนอน แต่ละแนว จะถูกเรียกว่า **แถว** (Row ; R)
2. จำนวนที่ประกอบกันเป็นแนวตั้ง แต่ละแนว จะถูกเรียกว่า **หลัก** (Column ; C)

◎◎ **ตัวอย่างการระบุตำแหน่งของสมาชิกของเมทริกซ์**

$$
\begin{array}{cl}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 & 9 & 8 \\ -3 & 4 & 6 & 9 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & 2 & 6 & 4 & -2 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{แถวที่ 1 } (R_1) \\ \leftarrow \text{แถวที่ 2 } (R_2) \\ \leftarrow \text{แถวที่ 3 } (R_3) \end{array}
\end{array}
$$

หลักที่ 1 (C_1), หลักที่ 2 (C_2), หลักที่ 3 (C_3), หลักที่ 4 (C_4), หลักที่ 5 (C_5), หลักที่ 6 (C_5)

จากเมทริกซ์ข้างต้นเราสามารถระบุตำแหน่งของสมาชิกของเมทริกซ์ได้ดังนี้

สมาชิกที่อยู่ในแถวที่ 1 (R_1) หลักที่ 4 (C_4) คือ 7

สมาชิกที่อยู่ในแถวที่ 2 (R_2) หลักที่ 3 (C_3) คือ 6

สมาชิกที่อยู่ในแถวที่ 3 (R_3) หลักที่ 6 (C_6) คือ -2 เป็นต้น

สัญลักษณ์ของเมทริกซ์

1. เมทริกซ์ที่มี m แถว (Row) n หลัก (Column) ถูกเขียนเป็น $m \times n$ เมทริกซ์ (ถูกอ่านออกเสียงว่า "เอ็มคูณเอ็นเมทริกซ์")

และ $m \times n$ ถูกเรียกว่า "มิติ (Dimension) ของเมทริกซ์"

<u>*เช่น*</u> $\begin{bmatrix} 3 & 7 & -6 & 8 \\ 9 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ เป็น 2×4 เมทริกซ์ มีมิเป็น 2×4

<u>ข้อสังเกต</u> 2×4 เมทริกซ์มิติ เป็น 2×4 มีลักษณะเด่นคือ

บอกจำนวนแถว (Row) $\longrightarrow 2 \times 4 \longleftarrow$ บอกจำนวนหลัก (Column)

2. ให้เมทริกซ์ ถูกแทนด้วยอักษรตัวใหญ่ภาษาอังกฤษ เช่น A, B, C, ..., Z

3. ให้สมาชิกของเมทริกซ์ ถูกแทนด้วย อักษรตัวเล็กภาษาอังกฤษที่มีตัวเลขสองตัวเขียนต่อไว้ทางขวาในระดับต่ำลงไปเล็กน้อย (Subscripts) ดังนี้

a_{ij} แทนสมาชิกของ A ที่อยู่ในแถวที่ i หลักที่ j

b_{ij} แทนสมาชิกของ B ที่อยู่ในแถวที่ i หลักที่ j

c_{ij} แทนสมาชิกของ C ที่อยู่ในแถวที่ i หลักที่ j

$\vdots$

z_{ij} แทนสมาชิกของ Z ที่อยู่ในแถวที่ i หลักที่ j

<u>เช่น</u> $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$

a_{11} แทนสมาชิกของ A ที่อยู่ในแถวที่ 1 หลักที่ 1 คือ 3 ($a_{11} = 3$)

a_{12} แทนสมาชิกของ A ที่อยู่ในแถวที่ 1 หลักที่ 2 คือ -2 ($a_{12} = -2$)

a_{21} แทนสมาชิกของ A ที่อยู่ในแถวที่ 2 หลักที่ 1 คือ 9 ($a_{21} = 9$)

a_{22} แทนสมาชิกของ A ที่อยู่ในแถวที่ 2 หลักที่ 2 คือ 5 ($a_{22} = 5$)

4. ถ้า A เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ แล้ว สามารถเขียน A โดยใช้ a_{ij} เป็นสมาชิกของ A ได้ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ให้ a_{ij} แทนสมาชิกของ A ที่อยู่ในแถวที่ i หลักที่ j โดยที่ i = 1, 2, 3, ..., m และ j = 1, 2, 3, .., n

* สามารถเขียน A ให้สั้นลงได้ดังนี้

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

<u>เช่น</u> $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ สามารถเขียน A ให้สั้นลงได้ คือ $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$

5. ถ้า A เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ แล้ว A จะมีสมาชิก $m \times n$ ตัว

<u>เช่น</u> A เป็น 3×2 เมทริกซ์ แสดงว่า A มีสมาชิก $3 \times 2 = 6$ ตัว

B เป็น 3×3 เมทริกซ์ แสดงว่า B มีสมาชิก $3 \times 3 = 9$ ตัว

ชนิดของเมทริกซ์ที่ควรคุ้นเคย

เมทริกซ์ที่น่าสนใจและควรนำมาสร้างความคุ้นเคยมีดังนี้

1. เมทริกซ์ศูนย์ (Zero Matrix) *2. เมทริกซ์จัตุรัส (Square Matrix)*

3. เมทริกซ์สามเหลี่ยม (Triangular Matrix) *4. เมทริกซ์เฉียง (Diagonal Matrix)*

5. เมทริกซ์สเกลาร์ (Scalar Matrix) *6. เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix)*

นำเมทริกซ์ที่ควรคุ้นเคยมาพิจารณาอย่างละเอียดดังนี้

1. เมทริกซ์ศูนย์ (Zero matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็น 0 ทุกตัว แทนด้วยสัญลักษณ์ "$\underline{0}$"

<u>*เช่น*</u> 1. $\underline{0} = [0\ 0\ 0]$ 2. $\underline{0} = [0]$ 3. $\underline{0} = [0\ 0]$

4. $\underline{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 5. $\underline{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 6. $\underline{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

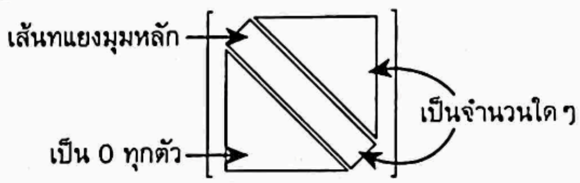
2. เมทริกซ์จัตุรัส (square matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนหลัก

<u>*เช่น*</u> 1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$

2. $B = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 8 \\ 6 & 7 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

3. เมทริกซ์สามเหลี่ยม (Triangular matrix)

<u>*3.1 เมทริกซ์สามเหลี่ยมด้านบน*</u> คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกใต้เส้นทแยงมุมหลักเป็น 0 ทุกตัว ดังนี้

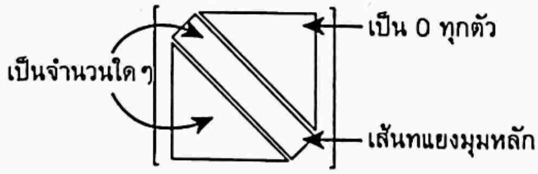


<u>*เช่น*</u>

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3.2 เมทริกซ์สามเหลี่ยมด้านล่าง คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกเหนือเส้นทแยงมุมหลักเป็น 0 ทุกตัว ดังนี้

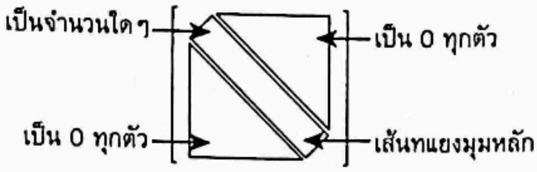


เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 0 \\ 9 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. เมทริกซ์เฉียง (Diagonal matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกใต้เส้นทแยงมุมหลักและเหนือเส้นทแยงมุมหลักเป็น 0 ทุกตัว ดังนี้

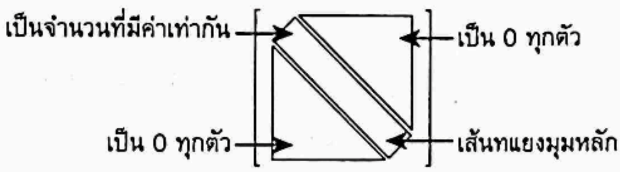


เช่น

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

5. เมทริกซ์สเกลาร์ (Scalar matrix) คือ เมทริกซ์เฉียงที่มีสมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลักมีค่าเท่ากันทุกตัว



เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

6. เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity matrix) หรือ เมทริกซ์หนึ่งหน่วย (Unit matrix) คือ เมทริกซ์สเกลาร์ที่มีสมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลักเป็น 1 ทุกตัว

<u>ข้อตกลง</u> เมทริกซ์เอกลักษณ์ที่มีขนาด $n \times n$ สามารถถูกแทนด้วยสัญลักษณ์ "I_n"

<u>และ</u> เพื่อไม่ให้เกิดความสับสนเกี่ยวกับมิติ อาจเขียน I_n เป็น I

<u>เช่น</u> $I_1 = [1]$ $\qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

การเท่ากันของเมทริกซ์

กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m \times n}$

A เท่ากับ B ก็ต่อเมื่อ $a_{ij} = b_{ij}$ สำหรับทุกค่าของ i และ j

โดยที่ $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ และ $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$

<u>ข้อตกลง</u> A เท่ากับ B ถูกเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A = B$

จากบทนิยาม $A = B$ ก็ต่อเมื่อ

1. มิติของ A = มิติของ B

และ 2. สมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันจะต้องมีค่าเท่ากัน

๐ ลองพิจารณาการไม่เท่ากันของเมทริกซ์ ดังนี้

<u>ข้อตกลง</u> A ไม่เท่ากับ C ถูกเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \neq C$ เราจะพบว่า $A \neq C$ ก็ต่อเมื่อ

1. มิติของ A ≠ มิติของ B

หรือ 2. สมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกัน จะต้องมีค่าต่างกันอย่างน้อยหนึ่งตัว

◎◎ ตัวอย่าง 1 กำหนดให้ $\begin{bmatrix} 2x & 4 \\ 3 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y + 2 & 4 \\ 3 & -x + 1 \end{bmatrix}$ แล้ว x และ y มีค่าเท่าไร

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ $2x = y + 2$ แสดงว่า $2x - y = 2$ ... (1)

และ $y = -x + 1$ แสดงว่า $x + y = 1$ ... (2)

นำ (1) + (2) *จะได้* $3x = 3$

$x = 1$ ... (3)

นำ (3) แทนใน (2) *จะได้* $1 + y = 1$

$y = 0$

ดังนั้น $x = 1$ และ $y = 0$

⊙⊙ ตัวอย่าง 2 กำหนดให้ $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$

จงแสดงให้เห็นว่า $\begin{bmatrix} x^3 + 3x & 3x - 3x^2 \\ x^3 - 1 & 3x - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x^2 + 1 & 1 - x^3 \\ 3x^2 - 3x & 3x^2 - x^3 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

$$\begin{bmatrix} x^3 + 3x & 3x - 3x^2 \\ x^3 - 1 & 3x - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x^2 + 1 & 1 - x^3 \\ 3x^2 - 3x & 3x^2 - x^3 \end{bmatrix}$$

ลองสลับไปสลับมาของ (1), (2), (3) และ (4)

จะเห็นได้ว่าสุดท้ายจะได้ความสัมพันธ์เป็น $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ นั่นเอง

ดังนั้น $\begin{bmatrix} x^3 + 3x & 3x - 3x^2 \\ x^3 - 1 & 3x - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x^2 + 1 & 1 - x^3 \\ 3x^2 - 3x & 3x^2 - x^3 \end{bmatrix}$ เป็นจริง

เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (Transpose of a Matrix)

1. เมทริกซ์สลับเปลี่ยนของ A ถูกเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ A^t
2. ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ แล้ว $A^t = [a_{ji}]_{n \times m}$

   สำหรับทุกค่าของ i และ j โดยที่ $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ และ $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$

✱ *<u>สิ่งที่ควรทราบ</u>*

1. A^t คือ เมทริกซ์ที่เกิดจากการนำแถว (Row) ของ A มาสร้างให้เป็นหลัก (Column) ของ A^t

2. ถ้า A มีมิติเป็น $m \times n$ แล้ว A^t จะมีมิติเป็น $n \times m$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

3. เกิดการสลับแถวไปเป็นหลัก สลับหลักไปเป็นแถว

◎◎ ตัวอย่าง 1 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 9 & -2 & 7 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & -8 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

และ $C = [5]$

จงหา 1. A^t 2. B^t 3. C^t

วิธีทำ 1. เนื่องจาก $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$ แสดงว่า $A^t = [a_{ji}]_{2 \times 3}$

ดังนั้น $A^t = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

2. เนื่องจาก $B = [b_{ij}]_{2 \times 5}$ แสดงว่า $B^t = [b_{ji}]_{5 \times 2}$

ดังนั้น $B^t = \begin{bmatrix} 9 & -2 & 7 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & -8 & 2 & 0 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ -2 & 6 \\ 7 & -8 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. เนื่องจาก $C = [c_{ij}]_{1 \times 1}$ แสดงว่า $C^t = [c_{ji}]_{1 \times 1}$

ดังนั้น $C^t = [5]^t = [5]$

◎◎ ตัวอย่าง 2 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 6 & -8 \\ 3 & 2 & -5 & 7 \\ 7 & 0 & 9 & 1 \end{bmatrix}$

จงหา 1. A^t 2. $(A^t)^t$ 3. $((A^t)^t)^t$

วิธีทำ

1. $A^t = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 6 & -8 \\ 3 & 2 & -5 & 7 \\ 7 & 0 & 9 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 7 \\ -3 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 9 \\ -8 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

2. $(A^t)^t = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 7 \\ -3 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 9 \\ -8 & 7 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 6 & -8 \\ 3 & 2 & -5 & 7 \\ 7 & 0 & 9 & 1 \end{bmatrix} = A$

3. $((A^t)^t)^t = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 6 & -8 \\ 3 & 2 & -5 & 7 \\ 7 & 0 & 9 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 7 \\ -3 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 9 \\ -8 & 7 & 1 \end{bmatrix} = A^t$

เมทริกซ์สมมาตร (Symmetric Matrix)

กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส ที่มีมิติเป็น $n \times n$

A เป็นเมทริกซ์สมมาตร ก็ต่อเมื่อ $A^t = A$

ลองเขียนเมทริกซ์สมมาตร ที่มีมิติเป็น 3×3 ดู จะทำให้มองเห็นโฉมหน้าของมันได้ชัดเจนยิ่งขึ้นดังนี้

เส้นทแยงมุมหลัก

$$A = \begin{bmatrix} a & \triangle & \square \\ \triangle & b & \star \\ \square & \star & c \end{bmatrix} \qquad A^t = \begin{bmatrix} a & \triangle & \square \\ \triangle & b & \star \\ \square & \star & c \end{bmatrix}$$

เป็นจำนวนใด ๆ

ข้อสังเกต เห็นไหมว่า $A^t = A$ *หมายเหตุ* เรียกว่า A ว่าเมทริกซ์สมมาตร

เมทริกซ์เสมือนสมมาตร (Skew – Symmetric Matrix)

กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีขนาด $n \times n$

A เป็นเมทริกซ์เสมือนสมมาตร ก็ต่อเมื่อ $A^t = -A$

ลองเขียนเมทริกซ์เสมือนสมมาตร ที่มีมิติเป็น 3×3 ดู จะทำให้มองเห็นโฉมหน้ามันได้ชัดเจนยิ่งขึ้นดังนี้

เส้นทแยงมุมหลัก เครื่องหมายตรงกันข้าม

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\triangle & -\square \\ \triangle & 0 & -\star \\ \square & \star & 0 \end{bmatrix} \qquad A^t = \begin{bmatrix} 0 & \triangle & \square \\ -\triangle & 0 & \star \\ -\square & -\star & 0 \end{bmatrix}$$

เป็น 0 ทุกตัว

ข้อสังเกต เห็นไหมว่า $A^t = -A$ *หมายเหตุ* เรียก A ว่าเมทริกซ์เสมือนสมมาตร

การคูณเมทริกซ์ด้วยค่าคงตัว

การนำเอาค่าคงตัวคูณกับเมทริกซ์ ก็คือ การนำเอาค่าคงที่นั้นคูณกับทุกสมาชิกของเมทริกซ์นั่นเอง

$$cA = Ac = c\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} & \cdots & ca_{2n} \\ ca_{31} & ca_{32} & ca_{33} & \cdots & ca_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & ca_{m3} & \cdots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

◎◎ ตัวอย่าง กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 4 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

จงหาค่าของ 1. 2A 2. -3A

วิธีทำ

1. เนื่องจาก $2A = 2\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 4 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $2A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 14 \\ 8 & 12 & -6 \end{bmatrix}$

2. เนื่องจาก $-3A = -3\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 4 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $-3A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -21 \\ -12 & -18 & 9 \end{bmatrix}$

การบวก และการลบเมทริกซ์

ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ แล้ว

$A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{m \times n}$

สำหรับทุกค่าของ i และ j โดยที่ $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ และ $j = \{1, 2, 3, ..., n\}$

* <u>สิ่งที่ควรทราบ</u>

1. $A \pm B$ จะเกิดขึ้นได้ เมื่อมิติของ A = มิติของ B
2. มิติของ $A \pm B$ = มิติของ A = มิติของ B
3. การหา $A \pm B$ ให้นำเอาสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันมาบวกและลบกัน

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A \pm B = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & a_{23} \pm b_{23} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ a_{31} \pm b_{31} & a_{32} \pm b_{32} & a_{33} \pm b_{33} & \cdots & a_{3n} \pm b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & a_{m3} \pm b_{m3} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}$$

⊙⊙ **ตัวอย่าง 1** กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

จงหาค่า 1. $A + B$ 2. $A - B$ และ 3. $5A - 3B$

◉◎ ตัวอย่าง 2 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 6 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

จงหาค่าของ 1. $A + B$ 2. $A - B$

3. $4A - 2B$ และ 4. $2A + 3B$

๏๏ ตัวอย่าง 3 กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$

และ $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$ โดยที่

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } i > j \\ 0 & \text{เมื่อ } i = j \\ -1 & \text{เมื่อ } i < j \end{cases} \quad \text{และ} \quad b_{ij} = \begin{cases} i + j & \text{เมื่อ } i = j \\ i - j & \text{เมื่อ } i \neq j \end{cases}$$

แล้ว $A + B$ เท่ากับ เมทริกซ์ในข้อใด

การค้นหาความจริงที่เกิดขึ้นรอบๆ การบวกเมทริกซ์ การลบเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์ด้วยค่าคงตัว และเมทริกซ์สลับเปลี่ยน

พิจารณาการบวกเมทริกซ์ การลบเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์ด้วยค่าคงตัว และเมทริกซ์สลับเปลี่ยน เพื่อค้นหาความจริงที่เกิดขึ้นรอบ ๆ และจดจำให้ขึ้นใจ

ค้นหาความจริงที่เกิดขึ้นรอบๆ ได้ดังนี้

1. สำหรับการบวกเมทริกซ์

ถ้า A, B, C และ $\underline{0}$ มีมิติเดียวกัน แล้ว

1.1 บวกกันได้ เมื่อมันมีมิติเหมือนกัน

1.2 บวกกันแล้วยังคงเป็นเมทริกซ์อยู่ แสดงว่า มันปิดในเชิงบวก

1.3 สลับที่ในเชิงบวก ดังนี้

$$A + B = B + A$$

1.4 จัดหมู่ในเชิงบวก ดังนี้

$$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$$

1.5 มีเอกลักษณ์ในเชิงบวก คือ $\underline{0}$

นั่นคือ $\underline{0} + A = A = A + \underline{0}$

1.6 เมทริกซ์ A ใด ๆ มีอินเวอร์สในเชิงบวก ถูกกำหนดให้มีสัญลักษณ์เป็น -A

นั่นคือ $(-A) + A = \underline{0} = A + (-A)$

สิ่งที่ควรทราบ ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ แล้ว $-A = [-a_{ij}]_{m \times n}$

1.7 ถูกตัดออกในเชิงบวก ดังนี้

2. สำหรับการลบเมทริกซ์

ถ้า A, B, C มีมิติเดียวกัน แล้ว

2.1 ลบกันได้ เมื่อมันมีมิติเหมือนกัน

2.2 ลบกันแล้วยังคงเป็นเมทริกซ์อยู่ แสดงว่า มันปิดในเชิงลบ

2.3 ไม่สลับที่ในเชิงลบ แสดงว่าไม่จริงที่ $A - B = B - A$

2.4 ไม่จัดหมู่ในเชิงลบ แสดงว่าไม่จริงที่ $(A - B) - C = A - (B - C)$

<u>สิ่งที่ควรทราบ</u> $A - B - C$ ถูกกำหนดให้มีได้นะ

<u>*นัยคือ*</u> $(A - B) - C$ หรือ $A - (B + C)$ นั่นเอง

2.5 ถ้า $A + B - C + D + E = F$ แล้ว $A = F - B + C - D - E$

3. สำหรับการคูณเมทริกซ์ด้วยค่าคงตัว พร้อมทั้งที่เกี่ยวกับการบวกและการลบเมทริกซ์

ถ้า A, B และ $\underline{0}$ มีมิติเดียวกัน และ c, d เป็นค่าคงตัว

3.1 $-A = (-1)A$

3.2 $-(cA) = (-c)A = c(-A)$

3.3 $1A = A$

3.4 $\underline{0}A = \underline{0}$

3.5 $c\underline{0} = \underline{0}$

3.6 ถ้า $cA = \underline{0}$ แล้ว $c = 0$ หรือ $A = \underline{0}$

3.7 $c(dA) = (cd)A = d(cA)$

3.8 $cA \pm dA = (c \pm d)A$

3.9 $cA \pm cB = c(A \pm B)$

<u>สิ่งที่ควรทราบ</u> เนื่องจาก $cA = Ac$ เราจะต้องรู้เองนะว่าการคูณเมทริกซ์ด้วยค่าคงตัว คูณค่าคงตัว เข้าข้างหน้าหรือข้างหลังก็ได้

<u>*เช่น*</u> จาก $c(dA) = (cd)A = d(cA)$

เราจะต้องรู้เองนะว่า $c(dA) = (cd)A = d(cA) = c(A)d = d(A)c = A(cd) = (Ac)d = (Ad)c$ ด้วย

4. สำหรับเมทริกซ์สลับเปลี่ยน พร้อมทั้งที่เกี่ยวกับการบวกและการลบเมทริกซ์

ถ้า A, B มีมิติเดียวกัน และ c เป็นค่าคงตัว

4.1 $(A^t)^t = A$

4.2 $((A^t)^t)^t = A^t$

4.3 $$\overbrace{(\ldots((A^t)^t)\ldots)^t}^{n\text{ ตัว}} = \begin{cases} A & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ A^t & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

4.4 $(cA)^t = cA^t$

4.5 $(A \pm B)^t = A^t \pm B^t$

4.6 ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส แล้ว $A + A^t$ จะเป็นเมทริกซ์สมมาตร (Symmetric matrix) เสมอ

<u>หมายเหตุ</u> คงจำได้นะว่า A เป็นเมทริกซ์สมมาตร ก็ต่อเมื่อ $A^t = A$

4.7 ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส แล้ว $A - A^t$ จะเป็นเมทริกซ์เสมือนสมมาตร (Skew - symmetric matrix) เสมอ

<u>หมายเหตุ</u> คงจำได้นะว่า A เป็นเมทริกซ์เสมือนสมมาตร ก็ต่อเมื่อ $A^t = -A$

การคูณระหว่างเมทริกซ์

ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{n \times r}$ แล้ว

เท่ากัน

$AB = [c_{ij}]_{m \times r}$ เมื่อ $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$

สำหรับทุกค่าของ i และ j โดยที่ $i \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ และ $j \in \{1, 2, 3, \ldots, r\}$

▽ คำแปลจากบทนิยาม

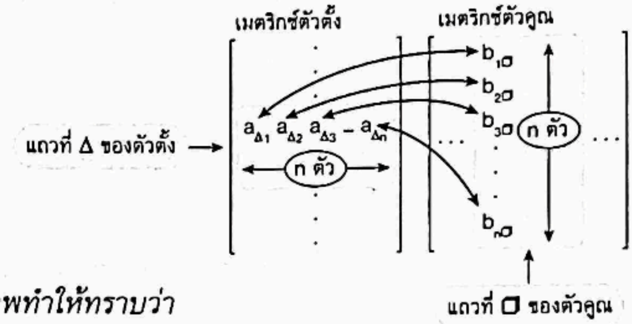
1. AB จะเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อ จำนวนหลักของ A(ตัวตั้ง) = จำนวนแถวของ B(ตัวคูณ)

2. ถ้า AB เกิดขึ้นได้ แล้ว มิติของ AB = จำนวนแถวของ A × จำนวนหลักของ B

$$[a_{ij}]_{m \times n} \quad [b_{ij}]_{n \times r} \quad = \quad [c_{ij}]_{m \times r}$$

เท่ากัน

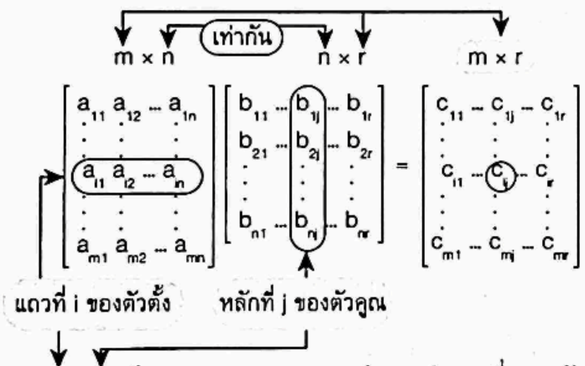
3. เรารู้เลยนะว่า สมาชิกแถวที่ △ หลักที่ □ ของผลคูณ ($c_{\triangle\square}$) เกิดจากผลบวกของผลคูณระหว่างสมาชิกแถวที่ △ ของตัวตั้งกับสมาชิกในลำดับเดียวกัน ในหลักที่ □ ของตัวคูณ



จากแผนภาพทำให้ทราบว่า

$$c_{\triangle\square} = \underbrace{a_{\triangle 1}b_{1\square} + a_{\triangle 2}b_{2\square} + a_{\triangle 3}b_{3\square} + \dots + a_{\triangle n}b_{n\square}}_{n \text{ ตัว}}$$

4. ลองเขียนแผนภาพเพิ่มเติมเพื่อทำให้มองภาพการคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ได้ง่ายขึ้นดังนี้



c_{ij} คือ ผลบวกของผลคูณระหว่างสมาชิกแถวที่ i ของตัวตั้งกับสมาชิกในลำดับเดียวกันในหลัก j ของตัวคูณ

ดังนั้น $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{in}b_{nj}$

5. สิ่งที่ควรระลึกอยู่เสมอเมื่อเมทริกซ์คูณกันได้

5.1 ถ้ามีคนถามถึง c_{ij} ของผลคูณให้มุ่งไปสนใจแถวที่ i ของตัวตั้งและมุ่งไปสนใจหลักที่ j ของตัวคูณ

5.2 เมทริกซ์ผลคูณจะต้องมีจำนวนแถวเท่ากับตัวตั้ง และจะต้องมีจำนวนหลักเท่ากับตัวคูณ

6. ข้อตกลง

6.1 ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส แล้ว มันจะคูณกับตัวมันเองได้แน่ ๆ โดยที่ $\underbrace{A\,A\,A \ldots A}_{n \text{ ตัว}}$ ถูกเขียนแทนด้วย A^n

6.2 ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

เช่น $A^n = A\,A^{n-1} = A^{n-1}A$ เมื่อ $n \geq 2$

$A^2 = A\,A$

$A^3 = A\,A\,A = A\,A^2 = A^2A$

๑๑ ตัวอย่าง 1 $A = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$

ถ้า $AB = C$ แล้ว จงหา C

◎◎ ตัวอย่าง 2 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

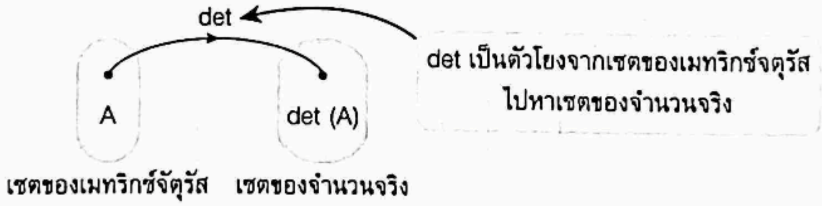
ถ้า AB = C แล้ว จงหา C

◎◎ ตัวอย่าง 3 จงหาเมทริกซ์ A B และ B A เมื่อกำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinant)

1. ดีเทอร์มิแนนต์ คือ ฟังก์ชันที่ถูกเขียนสั้น ๆ เป็น det
2. ถ้า A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ (A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส) แล้วสามารถเขียนแผนภาพการโยง det จาก A ไปหาเซตของจำนวนจริง ได้ดังนี้



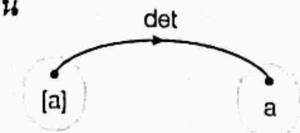
ข้อตกลง

ถ้า A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ แล้วดีเทอร์มิแนนต์ของ A ถูกเขียนแทนด้วย det (A) หรือ $|A|$

▲ ***การหาดีเทอร์มิแนนต์สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส มิติ $n \times n$***

1. ถ้า det โยงจาก เมทริกซ์จัตุรัสมิติ 1×1 แล้ว $\det([a]) = |a| = a$ เมื่อ $a \in R$

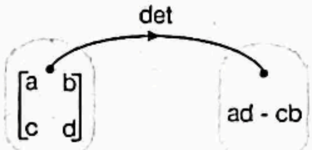
   สามารถเขียนแผนภาพได้ดังนี้



2. ถ้า det โยงจากเมทริกซ์จัตุรัสมิติ 2×2 แล้ว

   $$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb \quad \text{เมื่อ } a, b, c, d \in R$$

   สามารถเขียนแผนภาพได้ดังนี้

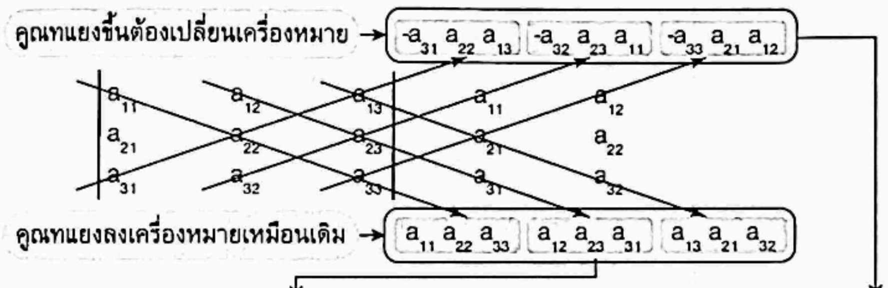


3. การหาดีเทอร์มิแนนต์สำหรับเมทริกซ์จัตุรัสมิติ 3×3

   3.1 ให้ต่อเมทริกซ์เดิมออกไปอีก 2 หลัก ดังนี้ *1) ตั้งหลักที่ 4 ให้เหมือนกับหลักที่ 1*
   2) ตั้งหลักที่ 5 ให้เหมือนกับหลักที่ 2

   3.2 คูณสมาชิกทแยงลงเครื่องหมายเหมือนเดิมและคูณสมาชิกทแยงขึ้นต้องเปลี่ยนเครื่องหมาย แล้วนำผลที่ได้มารวมกัน

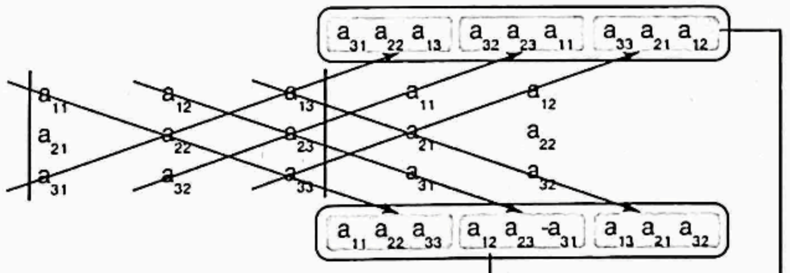
$$\text{ถ้า } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ แล้ว}$$



จะได้ $\det A = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}- a_{33}a_{21}a_{12}$

หรือ $\det A = (a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13}+a_{32}a_{23}a_{11}+a_{33}a_{21}a_{12})$

อาจมองเป็น



$\det A = (a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11}+ a_{33}a_{21}a_{12})$

4. ผู้เขียนจะกล่าวถึงดีเทอร์มิแนนต์ $n \times n$ เมทริกซ์ เมื่อ $n \geq 2$ ในเทคนิคชุดถัดไป ทั้งนี้เนื่องจากการหาดีเทอร์มิแนนต์ดังกล่าว จะต้องเริ่มจากการศึกษาไมเนอร์ (Minor) ให้เข้าใจเสียก่อน แล้วค่อยศึกษาตัวประกอบร่วมเกี่ยว (Cofactor) เพื่อใช้เป็นพื้นฐานในการหาดีเทอร์มิแนนต์ $n \times n$ เมทริกซ์ เมื่อ $n \geq 2$ ต่อไป

◎◎ ตัวอย่าง 1 กำหนดให้ $A = [-3]$ และ $B = [7]$ จงหาค่าของ det (A) และ det (B)

◎◎ ตัวอย่าง 2 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ det (A)

◎◎ ตัวอย่าง 3 จงหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ A เมื่อ $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

ดีเทอร์มิแนนต์ n × n เมทริกซ์ เมื่อ n ≥ 2

ถ้า $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ เมื่อ n ≥ 2 แล้วเราควรเริ่มศึกษาไมเนอร์ (Minor) ของ a_{ij} ให้เข้าใจเสียก่อน หลังจากนั้นค่อยศึกษา ตัวประกอบร่วมเกี่ยว (Cofactor) ของ a_{ij} เพื่อใช้เป็นพื้นฐานในการหาดีเทอร์มิแนนต์ของ A ดังแผนภาพต่อไปนี้

ไมเนอร์ของ a_{ij} ⇒ ตัวประกอบร่วมเกี่ยวข้อง a_{ij} ⇒ ดีเทอร์มิแนนต์ของ A

◈ ไมเนอร์ (Minor)

ถ้า $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ เมื่อ n ≥ 2 แล้ว

ไมเนอร์ของ a_{ij} คือ ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่ได้จากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ของ A ออก

◎◎ ตัวอย่าง จงหาไมเนอร์ของสมาชิกทุกตัวของเมทริกซ์ A เมื่อ $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

ตัวประกอบร่วมเกี่ยว (Cofactor)

ถ้า A = $[a_{ij}]_{n \times n}$ เมื่อ $n \geq 2$ แล้ว ตัวประกอบร่วมเกี่ยวของ a_{ij} คือ $(-1)^{i+j}M_{ij}(A)$

<u>ข้อตกลง</u> ตัวประกอบร่วมเกี่ยวของ a_{ij} ถูกเขียนแทนด้วย $C_{ij}(A)$

⊙⊙ ตัวอย่าง จงหาโคแฟกเตอร์ของสมาชิกทุกตัวของเมทริกซ์ A เมื่อ $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

เราสามารถสร้างเมทริกซ์ที่ประกอบไปด้วยสมาชิกที่เป็น $C_{11}(A)$, $C_{12}(A)$, $C_{13}(A)$, $C_{21}(A)$, $C_{22}(A)$, $C_{23}(A)$, $C_{31}(A)$, $C_{32}(A)$ และ $C_{33}(A)$ ได้ และเมทริกซ์ที่เกิดขึ้นใหม่นี้ จะถูกเรียกว่า **เมทริกซ์ของโคแฟกเตอร์** ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\text{เมทริกซ์ของโคแฟกเตอร์} = \begin{bmatrix} C_{11}(A) & C_{12}(A) & C_{13}(A) \\ C_{21}(A) & C_{22}(A) & C_{23}(A) \\ C_{31}(A) & C_{32}(A) & C_{33}(A) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}M_{11}(A) & (-1)^{1+2}M_{12}(A) & (-1)^{1+3}M_{13}(A) \\ (-1)^{2+1}M_{21}(A) & (-1)^{2+2}M_{22}(A) & (-1)^{2+3}M_{23}(A) \\ (-1)^{3+1}M_{31}(A) & (-1)^{3+2}M_{32}(A) & (-1)^{3+3}M_{33}(A) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 8 & -22 \\ -5 & -5 & -5 \\ 7 & 22 & -23 \end{bmatrix}$$

ให้ C_{ij} แทนสมาชิกของเมทริกซ์ของโคแฟกเตอร์ที่อยู่ในแถวที่ i หลักที่ j โดยที่ i = 1, 2, 3 และ j = 1, 2, 3

สามารถเขียนเมทริกซ์ของโคแฟกเตอร์ให้สั้น ๆ ได้เป็น $[C_{ij}(A)]_{3 \times 3}$

◎◎ ตัวอย่าง 1 ถ้า $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ แล้ว $\det(-2A^3A^t(A + A^t))$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

๑๑ ตัวอย่าง 2 ถ้า $A = \begin{bmatrix} ab & 3 & b^2 \\ a^2 & 5 & ab \\ ac & 7 & bc \end{bmatrix}$ จงหาของ det(A)

การแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยใช้กฎของคราเมอร์

กฎของคราเมอร์ (Cramer's Rule)

กำหนดระบบสมการเชิงเส้นที่มี n สมการ และ n ตัวแปร โดย AX = B เป็นสมการเมทริกซ์ที่สัมพันธ์กับระบบสมการเชิงเส้นนี้ ดังนี้

$$\overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}^{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}^{b}$$

ถ้า $\det(A) \neq 0$ แล้ว $x_1 = \dfrac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \dfrac{\det(A_2)}{\det(A)}, x_3 = \dfrac{\det(A_3)}{\det(A)}, \ldots, x_n = \dfrac{\det(A_n)}{\det(A)}$

เมื่อ A_i คือ เมทริกซ์ที่ได้จากการแทนหลักที่ i ของ A ด้วยหลักของ B ทุก $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

แทนหลักที่ 1 ของ A ด้วยหลักการ B

นั่นคือ $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \\ b_n \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \\ a_{n2} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ \\ a_{n3} \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \end{matrix} & \begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \\ a_{nn} \end{matrix} \end{vmatrix}}{\det(A)}$

แทนหลักที่ 2 ของ A ด้วยหลักการ B

$x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \\ a_{n1} \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \\ b_n \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ \\ a_{n3} \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \end{matrix} & \begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \\ a_{nn} \end{matrix} \end{vmatrix}}{\det(A)}$

แทนหลักที่ 3 ของ A ด้วยหลักการ B

$x_3 = \dfrac{\begin{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \\ a_{n1} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \\ a_{n2} \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \\ b_n \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \vdots \\ \\ \cdots \end{matrix} & \begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \\ a_{nn} \end{matrix} \end{vmatrix}}{\det(A)}$

$\vdots$

แทนหลักที่ n ของ A ด้วยหลักการ B

และ $x_n = \dfrac{\begin{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \\ a_{n1} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \\ a_{n2} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ \\ a_{n3} \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \\ b_n \end{matrix}} \end{vmatrix}}{\det(A)}$

◎◎ ตัวอย่าง 1 ถ้า x, y, z เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ

◎◎ ตัวอย่าง 2 จงแก้ระบบสมการ ต่อไปนี้

กำหนดให้ $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ แล้ว $x + y$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -2
2. -1
3. 1
4. 2

กำหนดระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} 2x + 4y + z &= 1 \\ x + 2y &= -2 \\ -x - 3y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

ค่าของ x ที่เป็นคำตอบของระบบสมการนี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 20
2. 9
3. -9
4. -20