



เฉลย Assignment 4
MAZ1302 แคลคูลัส ๑

หัวข้อ อนุพันธ์อันดับสูง อนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง และตรีโกณมิติ สัปดาห์ที่ 4 คะแนน 10 คะแนน
ผู้สอน ผศ.ดร.ธัญยศ จำปาทวย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

1. จงหา $f^{(n)}(x)$ ในรูปทั่วไป เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และ $f(x) = \frac{x}{x+1}$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$f(x) = \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} = 1 - (x+1)^{-1}$$

$$f'(x) = (x+1)^{-2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = -2(x+1)^{-3} = \frac{-2}{(x+1)^3}$$

$$f'''(x) = (-2)(-3)(x+1)^{-4} = \frac{(-2)(-3)}{(x+1)^4}$$

$\vdots$

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= (-2)(-3)(-4) \cdots (-n)(x+1)^{-(n+1)} \\ &= (-1)^{n-1} 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n (x+1)^{-(n+1)} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} n!}{(x+1)^{n+1}}$$

2. กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ จงหา $\frac{f^{(100)}(1)}{f^{(99)}(1)}$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) x^{-\frac{5}{2}}$$

$$f'''(x) = \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{5}{2}\right) x^{-\frac{7}{2}}$$

$\vdots$

$$f^{(99)}(x) = \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{5}{2}\right) \cdots \left(-\frac{197}{2}\right) x^{-\frac{199}{2}}$$

$$f^{(100)}(x) = \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{5}{2}\right) \cdots \left(-\frac{197}{2}\right) \left(-\frac{199}{2}\right) x^{-\frac{201}{2}}$$

ดังนั้น

$$\frac{f^{(100)}(1)}{f^{(99)}(1)} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{5}{2}\right) \cdots \left(-\frac{197}{2}\right) \left(-\frac{199}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{5}{2}\right) \cdots \left(-\frac{197}{2}\right)} = -\frac{199}{2} \quad \#$$

3. จงหาอนุพันธ์ของ $y = \sqrt[5]{\frac{(x+1)^2(\ln x)^3 \cos^2 x}{e^{3x} x^3 (1-5x)^6}}$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln \sqrt[5]{\frac{(x+1)^2(\ln x)^3 \cos^2 x}{e^{3x} x^3 (1-5x)^6}} \\ &= \frac{1}{5} [2 \ln(x+1) + 3 \ln(\ln x) + 2 \ln(\cos x) - 3x - 3 \ln x - 6 \ln(1-5x)]\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\ln y) &= \frac{1}{5} \left[2 \cdot \frac{1}{x+1} + 3 \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{\cos x} (-\sin x) - 3 - \frac{3}{x} - 6 \cdot \frac{1}{1-5x} (-5) \right] \\ \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{5} \left[\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x \ln x} - \frac{2 \sin x}{\cos x} - 3 - \frac{3}{x} + \frac{30}{1-5x} \right] \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{y}{5} \left[\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x \ln x} - 2 \tan x - 3 - \frac{3}{x} + \frac{30}{1-5x} \right]\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5} \sqrt[5]{\frac{(x+1)^2(\ln x)^3 \cos^2 x}{e^{3x} x^3 (1-5x)^6}} \left[\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x \ln x} - 2 \tan x - 3 - \frac{3}{x} + \frac{30}{1-5x} \right] \quad \#$$

4. จงหาอนุพันธ์ของ $y = (x \ln x)^{\ln x}$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln(x \ln x)^{\ln x} = (\ln x) \cdot \ln(x \ln x) \\ &= (\ln x) \cdot [\ln x + \ln(\ln x)] = (\ln x)^2 + \ln x \cdot \ln(\ln x) \\ \frac{d}{dx}(\ln y) &= \frac{d}{dx} [(\ln x)^2 + \ln x \cdot \ln(\ln x)] \\ \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= 2(\ln x) \frac{d}{dx} \ln x + \ln x \frac{d}{dx} \ln(\ln x) + \ln(\ln x) \frac{d}{dx} \ln x \\ \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= 2(\ln x) \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot \frac{1}{\ln x} \frac{d}{dx} \ln x + \ln(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= 2(\ln x) \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \ln(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \\ \frac{dy}{dx} &= y \cdot \frac{1}{x} (2 \ln x + \ln(\ln x) + 1)\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = (x \ln x)^{\ln x} \cdot \frac{1}{x} (2 \ln x + \ln(\ln x) + 1) \quad \#$$

5. จงหาอนุพันธ์ของ $y = \tan^2(\sec^2 x^2)$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}y &= [\tan((\sec x^2)^2)]^2 \\ \frac{dy}{dx} &= 2[\tan((\sec x^2)^2)] \cdot \frac{d}{dx} \tan((\sec x^2)^2) \\ &= 2[\tan((\sec x^2)^2)] \sec^2((\sec x^2)^2) \cdot \frac{d}{dx} (\sec x^2)^2 \\ &= 2[\tan((\sec x^2)^2)] \sec^2((\sec x^2)^2) 2(\sec x^2) \cdot \frac{d}{dx} \sec x^2 \\ &= 2[\tan((\sec x^2)^2)] \sec^2((\sec x^2)^2) 2(\sec x^2) \sec x^2 \tan x^2 \cdot \frac{d}{dx} x^2 \\ &= 2[\tan((\sec x^2)^2)] \sec^2((\sec x^2)^2) 2(\sec x^2) \sec x^2 \tan x^2 \cdot 2x \\ &= 8x \tan(\sec^2 x^2) \cdot \sec^2(\sec^2 x^2) \cdot \sec^2 x^2 \cdot \tan x^2 \quad \#\end{aligned}$$

6. จงหาอนุพันธ์ของ $y = x^{-1} \tan^{-1}(x^{-1}) + \cos(\ln(\cos x))$

แนวคำตอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} y &= x^{-1} [\tan(x^{-1})]^{-1} + \cos(\ln(\cos x)) \\ \frac{dy}{dx} &= x^{-1} (-1) [\tan(x^{-1})]^{-2} \cdot \frac{d}{dx} \tan(x^{-1}) - x^{-2} [\tan(x^{-1})]^{-1} - \sin(\ln(\cos x)) \cdot \frac{d}{dx} \ln(\cos x) \\ &= -x^{-1} [\tan(x^{-1})]^{-2} \sec^2(x^{-1}) \cdot \frac{d}{dx} x^{-1} - x^{-2} [\tan(x^{-1})]^{-1} - \sin(\ln(\cos x)) \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{d}{dx} \cos x \\ &= -x^{-1} [\tan(x^{-1})]^{-2} \sec^2(x^{-1}) (-x^{-2}) - x^{-2} [\tan(x^{-1})]^{-1} - \sin(\ln(\cos x)) \cdot \frac{1}{\cos x} (-\sin x) \\ &= x^{-3} \tan^{-2}(x^{-1}) \sec^2(x^{-1}) - x^{-2} \tan^{-1}(x^{-1}) + \tan x \cdot \sin(\ln(\cos x)) \quad \# \end{aligned}$$

7. จงแสดงว่า $y = e^x(\cos x + \sin x)$ สอดคล้องสมการ $y'' - 2y' + 2y = 0$

แนวคำตอบ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} y &= e^x(\cos x + \sin x) \\ y' &= e^x(-\sin x + \cos x) + e^x(\cos x + \sin x) = 2e^x \cos x \\ y'' &= 2e^x \cos x - 2e^x \sin x \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + 2y &= [2e^x \cos x - 2e^x \sin x] - 2[2e^x \cos x] + 2[e^x \cos x + e^x \sin x] \\ &= 2e^x \cos x - 2e^x \sin x - 4e^x \cos x + 2e^x \cos x + 2e^x \sin x \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $y = e^x(\cos x + \sin x)$ สอดคล้องสมการ $y'' - 2y' + 2y = 0$

8. จงหา $a \in [0, 2\pi]$ ที่ทำให้ $f'(a) = 0$ เมื่อ $f(x) = e^{\cos x} \cos^2 x$

แนวคำตอบ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{\cos x})' \cos^2 x + e^{\cos x} (\cos^2 x)' \\ &= e^{\cos x} (\cos x)' \cos^2 x + e^{\cos x} 2 \cos x (\cos x)' \\ &= e^{\cos x} (-\sin x) \cos^2 x + e^{\cos x} 2 \cos x (-\sin x) \\ &= -e^x \cos x \sin x (\cos x + 2) \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$0 = f'(a) = -e^a \cos a \sin a (\cos a + 2)$$

เนื่องจาก $e^a \neq 0$ และ $\cos a + 2 \neq 0$ ฉะนั้น $\sin a = 0$ หรือ $\cos a = 0$ ดังนั้น $a = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \quad \#$