



เฉลย Assignment 2
MAZ1302 แคลคูลัส ๑

หัวข้อ ลิมิตตรีโกณมิติ ลิมิตเกี่ยวกับอนันต์ และความต่อเนื่อง สัปดาห์ที่ 2 คะแนน 10 คะแนน
ผู้สอน ผศ.ดร.ธัญยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

1. แนวคำตอบ

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 2 \sin^2 x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{1 - \cos x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{1 - \cos x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x (1 + \cos x)}{1^2 - \cos^2 x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x (1 + \cos x)}{\sin^2 x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} 2(1 + \cos x) = 2(1 + 1) = 4 \quad \# \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cot^3 x - 1)(\csc^2 x)}{1 + \cos 2x - 2 \sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} - 1) \cdot \frac{1}{\sin^2 x}}{1 + (2 \cos^2 x - 1) - 2 \sin^2 x} \\&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos^3 x - \sin^3 x) \cdot \frac{1}{\sin^5 x}}{2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x} \\&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \cos x \sin x + \sin^2 x)}{2(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) \sin^5 x} \\&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x + \cos x \sin x + \sin^2 x}{2(\cos x + \sin x) \sin^5 x} \\&= \frac{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{1}{\sqrt{2}}) + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2}{2(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{1}{\sqrt{2}})^5} \\&= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2(\frac{2}{\sqrt{2}})(\frac{1}{4\sqrt{2}})} \\&= \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3 \end{aligned}$$

2. แนวคำตอบ

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x - \sin 2x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan 3x}{x} - \frac{\sin 2x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{x \cos 3x} - 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \right) \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{1}{\cos 3x} - 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \right) = 3(1) \cdot \frac{1}{1} - 2 \cdot 1 = 1 \quad \# \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\frac{1}{\cos x} - 1)}{x^3} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3 \cos x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3 \cos x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos^2 x)}{x^3 \cos x (1 + \cos x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \sin^2 x}{x^3 \cos x (1 + \cos x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^3 \frac{1}{\cos x (1 + \cos x)} \\
&= 1^3 \cdot \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

แนวคำตอบ เนื่องจาก

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \quad \text{ทุก } x \neq 0$$

จะได้ว่า $x^4 > 0$ เมื่อ $x \neq 0$ ดังนั้น

$$-x^4 \leq x^4 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^4$$

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 0} -x^4 = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^4$ โดยทฤษฎีบทประกบ (Squeeze theorem) จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^4 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad \#$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

แนวคำตอบ พิจารณา $x > 0$ จะได้ว่า $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$ เนื่องจาก $x > 0$ ดังนั้น

$$-x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$$

จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$ และ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

และพิจารณา $x < 0$ จะได้ว่า $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$ เนื่องจาก $x < 0$ ดังนั้น

$$x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq -x$$

จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0$ และ $\lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$ ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0^-} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

สรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

4. แนวคำตอบ

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)^2 + (2x+1)^2}{(x-1)^2 + (x+2)^2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 1 + 4x^2 + 4x + 1}{x^2 - 2x + 1 + x^2 + 4x + 4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 + 6x + 2}{2x^2 + 2x + 2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 + \frac{6}{x} + \frac{2}{x^2}}{2 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} \\
 &= \frac{5 + 0 + 0}{2 + 0 + 0} = \frac{5}{2} \quad \#
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^5(2x-1)^3}{(3-2x)^2(x^2-1)^3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x(1+\frac{1}{x})]^5[x(2-\frac{1}{x})]^3}{[x(\frac{3}{x}-2)]^2[x^2(1-\frac{1}{x^2})]^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5[1+\frac{1}{x}]^5x^3[2-\frac{1}{x}]^3}{x^2[\frac{3}{x}-2]^2x^6[1-\frac{1}{x^2}]^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[1+\frac{1}{x}]^5[2-\frac{1}{x}]^3}{[\frac{3}{x}-2]^2[1-\frac{1}{x^2}]^3} \\
 &= \frac{(1+0)^5(2-0)^3}{(0-2)^2(1-0)^3} = 2 \quad \#
 \end{aligned}$$

5. แนวคำตอบ

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}+3x}{1-\sqrt[3]{x^3+1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2(4+\frac{1}{x^2})}+3x}{1-\sqrt[3]{x^3(1+\frac{1}{x^3})}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+3x}{1-x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+3x}{x\left(\frac{1}{x}-\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+3\right)}{x\left(\frac{1}{x}-\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+3}{\frac{1}{x}-\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4+0}+3}{0-\sqrt[3]{1+0}} = \frac{2+3}{0-1} = -5 \quad \#
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}+3x}{1-\sqrt[3]{x^3+1}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2(4+\frac{1}{x^2})}+3x}{1-\sqrt[3]{x^3(1+\frac{1}{x^3})}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+3x}{1-x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+3x}{x\left(\frac{1}{x}-\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+3\right)}{x\left(\frac{1}{x}-\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+3}{\frac{1}{x}-\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4+0}+3}{0-\sqrt[3]{1+0}} = \frac{-2+3}{0-1} = -1 \quad \#
 \end{aligned}$$

6. แนวคำตอบ

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + x + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})} + x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} \\
 &= \frac{1 + 0}{(\sqrt{1 + 0 + 0} + 1)} = \frac{1}{2} \quad \#
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 + x + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})} - x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{-x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{-\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} \\
 &= \frac{1 + 0}{-(\sqrt{1 + 0 + 0} + 1)} = -\frac{1}{2} \quad \#
 \end{aligned}$$

7. แนวคำตอบ ให้ $x > 0$ จะได้ว่า $\frac{1}{x} > 0$ และ

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{5x}\right) \leq 1$$

ดังนั้น

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin\left(\frac{1}{5x}\right)}{x} \leq \frac{1}{x}$$

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} = 0$ และ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

โดยทฤษฎีบทประกบ สรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{5x}\right)}{x} = 0$

ทฤษฎีบท 2.4.11

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x \sin\left(\frac{1}{5x}\right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{5} \cdot 5x \sin\left(\frac{1}{5x}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{5} \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{5x}\right)}{\frac{1}{5x}} \\ &= \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{1}{5} \quad \# \end{aligned}$$

8. แนวคำตอบ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x - \csc x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{\sin x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x + 1}{\cos x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos^2 x - 1}{\sin x(\cos x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin^2 x}{\sin x(\cos x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\cos x + 1} \\ &= \frac{0}{1 + 1} = 0 \quad \# \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-3x+x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(-\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)(x-2)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(-\frac{(x-2)}{(x-1)(x-2)} - \frac{1}{(x-1)(x-2)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x+2-1}{(x-1)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)}{(x-1)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x-2)} = 1 \quad \# \end{aligned}$$

9. (ก) นำเงื่อนไขความต่อเนื่องอธิบายการหาค่า a, b ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนจำนวนจริง เมื่อ

$$f(x) = \begin{cases} a + 2x^2 & \text{เมื่อ } x \leq -1 \\ b + ax & \text{เมื่อ } -1 < x < 1 \\ 2ax + 1 & \text{เมื่อ } x \geq 1 \end{cases}$$

แนวคำตอบ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ -1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} a + 2x^2 &= \lim_{x \rightarrow -1^+} b + ax \\ a + 2 &= b - a \\ 2a - b &= -2 \end{aligned}$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ 1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} b + ax &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 2ax + 1 \\ b + a &= 2a + 1 \\ b - a &= 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $a = -1, b = 0$ #

(ข) จงหาช่วงที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x) = \ln(1 + \cos x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

เนื่องจาก $-1 \leq \cos x \leq 1$ ดังนั้น $0 \leq 1 + \cos x \leq 2$ จะเห็นว่า $(1 + \cos x) > 0$ นั่นคือ $\cos x \neq -1$ หรือ $x \neq (2n-1)\pi$ เมื่อ $n \in \mathbb{Z}$ สรุปได้ว่าโดเมนของ $f(x) = \ln(1 + \cos x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง เท่ากับ

$$\mathbb{R} - \{(2n-1)\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$$