

สมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

Part 1 สมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งแบบตัวแปรแยกกันได้

1. ลักษณะของสมการแบบตัวแปรแยกกันได้

รูปแบบนี้ คือสมการที่สามารถจัดรูปได้เป็น

$$f(x)dx = g(y)dy$$

- $f(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x
- $g(y)$ เป็นฟังก์ชันของ y

ข้อสังเกต รูปแบบนี้จะแยกตัวแปร x และ y ออกจากกันอย่างชัดเจน

หมายเหตุ 1 โดยปกติ สมการอนุพันธ์จะไม่อยู่ในรูป $f(x)dx = g(y)dy$ จึงต้องอาศัยการจัดรูปสมการก่อน

ตัวอย่างที่ 1 จงจัดรูปสมการต่อไปนี้ เพื่อหาฟังก์ชัน $f(x)$ และ $g(y)$

$$(1 + y)^2 dx = \frac{1}{2x} dy$$

วิธีทำ เราสามารถจัดรูปสมการได้เป็น

$$2x dx = \frac{1}{(1 + y)^2} dy = (1 + y)^{-2} dy$$

ดังนั้น สมการจะเขียนได้ในรูป $f(x)dx = g(y)dy$ เมื่อ

$$f(x) = 2x \text{ และ } g(y) = (1 + y)^{-2}$$

หมายเหตุ 2 โดยทั่วไป สมการอนุพันธ์อาจอยู่ในรูป y' จึงต้องแทน y' ด้วย dy/dx แล้วค่อยจัดให้อยู่ในรูป $f(x)dx = g(y)dy$

ตัวอย่างที่ 2 จงจัดรูปสมการต่อไปนี้ เพื่อหาฟังก์ชัน $f(x)$ และ $g(y)$

$$y' = \frac{x}{y}$$

วิธีทำ เราสามารถแทน y' ด้วย dy/dx จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

และจะสามารถจัดรูปสมการได้เป็น

$$x dx = y dy$$

ดังนั้น สมการจะเขียนได้ในรูป $f(x)dx = g(y)dy$ เมื่อ

$$f(x) = x \text{ และ } g(y) = y$$

2. ผลเฉลยของสมการแบบตัวแปรแยกกันได้

สำหรับสมการในรูปแบบ

$$f(x)dx = g(y)dy$$

เราสามารถหาผลเฉลยได้โดยการอินทิเกรตดังนี้

$$\boxed{\int f(x)dx = \int g(y)dy + c}$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง

และเมื่อได้ผลการอินทิเกรตแล้ว เราจะจัดรูปต่อไปให้อยู่ในรูปที่ y เป็นฟังก์ชันของ x

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$(1 + y)^2 dx = \frac{1}{2x} dy$$

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 1 เราจัดรูปได้ $f(x)dx = g(y)dy$ เมื่อ

$$f(x) = 2x, \quad g(y) = (1 + y)^{-2}$$

ดังนั้น อินทิกรัลของ $f(x)$ และ $g(y)$ จะมีค่า

$$\int f(x)dx = \int 2x dx = x^2$$

และ

$$\int g(y)dy = \int (1 + y)^{-2} dy = -(1 + y)^{-1}$$

ดังนั้น จากสมการ

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy + c$$

จะได้

$$x^2 = -(1 + y)^{-1} + c$$

$$x^2 - c = -\frac{1}{1 + y}$$

$$y = -1 + \frac{1}{x^2 - c} = \left(\frac{1}{x^2 - c} - 1 \right) \frac{1}{c - x^2}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y' = \frac{x}{y}$$

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 2 เราจัดรูปได้ $f(x)dx = g(y)dy$ เมื่อ

$$f(x) = x \quad \text{และ} \quad g(y) = \frac{1}{y}$$

ดังนั้น อินทิกรัลของ $f(x)$ และ $g(y)$ จะมีค่า

$$\int f(x)dx = \int xdx = \frac{x^2}{2}$$

และ

$$\int g(y)dy = \int \frac{1}{y}dy = \ln|y|$$

ดังนั้น จากสมการ

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy + c$$

จะได้

$$\frac{x^2}{2} = \ln|y| + c$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} - c$$

$$y^2 = x^2 - 2c$$

$$y = \pm\sqrt{x^2 - 2c}$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y' = \frac{y^2 + 1}{x^2}$$

วิธีทำ ในขั้นแรกจะต้องจัดสมการให้อยู่ในรูป $f(x)dx = f(y)dy$

เราสามารถแทน y' ด้วย dy/dx จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 1}{x^2}$$

และจะสามารถจัดรูปสมการได้เป็น

$$\frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{y^2 + 1}dy$$

ดังนั้น สมการจะเขียนได้ในรูป $f(x)dx = g(y)dy$ เมื่อ

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \quad \text{และ} \quad g(y) = \frac{1}{y^2 + 1}$$

ดังนั้น อินทิกรัลของ $f(x)$ และ $g(y)$ จะมีค่า

$$\int f(x)dx = \int x^{-2}dx = -x^{-1} = -\frac{1}{x}$$

และ

$$\int g(y)dy = \int \frac{1}{y^2 + 1}dy = \tan^{-1}(y)$$

ดังนั้น จากสมการ

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy + c$$

จะได้

$$-\frac{1}{x} = \tan^{-1}(y) + c$$
$$\tan^{-1}(y) = -\frac{1}{x} - c$$

จาก $\tan(\tan^{-1}(y)) = y$ ได้

$$y = \tan\left(-\frac{1}{x} - c\right)$$

เอกสารอ้างอิง

ศ. ดร.มงคล เดชนครินทร์ คณิตศาสตร์วิศวกรรมไฟฟ้า พิมพ์ครั้งที่ 4 สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2558.