



มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
คณะครุศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ข้อสอบกลางภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2564

ชื่อวิชา	แคลคูลัส ๒ Calculus 2
รหัสวิชา	MAC1303
วันเวลาสอบ	วันเสาร์ที่ 29 มกราคม 2565 เวลา 8:30 - 12:30
สถานที่สอบ	ห้องเรียนออนไลน์ (โปรแกรม Zoom)
ผู้สอน	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนชัยศ จำปาหวาย
คะแนน	105 คะแนน คิดเป็น 25%

- ข้อ 1-15 แบบเติมคำตอบ/ตัวเลือก ข้อละ 1 คะแนน (รวม 15 คะแนน)
- ข้อ 16-24 แบบแสดงวิธีทำ ข้อละ 10 คะแนน (รวม 90 คะแนน)

ข้อ 1

1. จงหาพจน์ที่ 10 ของลำดับ $1, 10, 19, 28, \dots$
2. จงหาพจน์ที่ 10 ของลำดับ $2, 10, 18, 26, \dots$
3. จงหาพจน์ที่ 20 ของลำดับ $1, -4, 9, -16, 25, -36, \dots$
4. จงหาพจน์ที่ 100 ของลำดับ $1, -3, 5, -7, 9, -11, \dots$

ข้อ 2

1. กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{10} (an + 1) = 780$ จงหาค่าของ a
2. กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{10} (an + 1) = 890$ จงหาค่าของ a
3. กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{10} (an + 2) = 570$ จงหาค่าของ a
4. กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{10} (an + 2) = 625$ จงหาค่าของ a

ข้อ 3

1. กำหนดให้ $A = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{60 \cdot 61}$ จงหาค่าของ $61A$
2. กำหนดให้ $A = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{59 \cdot 61}$ จงหาค่าของ $61A$
3. กำหนดให้ $A = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{58 \cdot 61}$ จงหาค่าของ $61A$
4. กำหนดให้ $A = \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{57 \cdot 61}$ จงหาค่าของ $61A$

ข้อ 4

1. อนุกรมอนันต์ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^n}$ มีค่าเท่าใด
2. อนุกรมอนันต์ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5^{n-1}}$ มีค่าเท่าใด
3. อนุกรมอนันต์ $\sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot 2^{-n}$ มีค่าเท่าใด
4. อนุกรมอนันต์ $\sum_{n=0}^{\infty} 6 \cdot 3^{-n}$ มีค่าเท่าใด

ข้อ 5

1. กำหนดให้ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 3$ จงหาค่าของ $60x$
2. กำหนดให้ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 4$ จงหาค่าของ $60x$
3. กำหนดให้ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 5$ จงหาค่าของ $60x$
4. กำหนดให้ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 6$ จงหาค่าของ $60x$

ข้อ 6

1. จงหาค่าของ (R) แห่งการลู่อเข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{3^n}$
2. จงหาค่าของ (R) แห่งการลู่อเข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n}$
3. จงหาค่าของ (R) แห่งการลู่อเข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{4^n}$
4. จงหาค่าของ (R) แห่งการลู่อเข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} nx^{2n+1}$

ข้อ 7

1. ช่วงแห่งการลู่อเข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n}$ ตรงกับข้อใด

a. $(0, 1)$

b. $(0, 1]$

c. $[0, 1)$

d. $[0, 1]$

2. ช่วงแห่งการลู่อเข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-1)^{2n}}{n}$ ตรงกับข้อใด

a. $(0, 1)$

b. $(0, 1]$

c. $[0, 1)$

d. $[0, 1]$

ข้อ 8

1. ข้อใดคือพหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 3 รอบจุด $x = 1$ ของฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt[3]{x}$

a. $1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{10}{27}(x-1)^3$

b. $1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{2}{9}(x-1)^2 + \frac{10}{27}(x-1)^3$

c. $1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{2}{9}(x-1)^2 + \frac{8}{81}(x-1)^3$

d. $1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{5}{81}(x-1)^3$

2. ข้อใดคือพหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 3 รอบจุด $x = 1$ ของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

a. $1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{2}{9}(x-1)^2 + \frac{14}{81}(x-1)^3$

b. $1 - \frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{9}(x-1)^2 - \frac{28}{27}(x-1)^3$

c. $1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{2}{9}(x-1)^2 + \frac{28}{27}(x-1)^3$

d. $1 - \frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{9}(x-1)^2 - \frac{14}{81}(x-1)^3$

ข้อ 9

1. ข้อใดคือ**เศษเหลือ** ของการประมาณ $\sqrt[3]{1.1}$ โดยใช้ฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ด้วยพหุนามเทย์เลอร์ ดีกรี 3 รอบจุด 1

a. $\frac{f^{(3)}(c)}{3!}(0.1)^3$ เมื่อ $0 < c < 1$

c. $\frac{f^{(4)}(c)}{4!}(0.1)^4$ เมื่อ $0 < c < 1$

b. $\frac{f^{(4)}(c)}{4!}(0.1)^4$ เมื่อ $1 < c < 1.1$

d. $\frac{f^{(3)}(c)}{3!}(0.1)^3$ เมื่อ $1 < c < 1$

2. ข้อใดคือ**เศษเหลือ** ของการประมาณ $\sqrt[3]{0.1}$ โดยใช้ฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ด้วยพหุนามเทย์เลอร์ ดีกรี 3 รอบจุด 1

a. $\frac{f^{(4)}(c)}{4!}(0.9)^3$ เมื่อ $0.1 < c < 1$

c. $\frac{f^{(3)}(c)}{3!}(0.9)^4$ เมื่อ $0.1 < c < 1$

b. $\frac{f^{(3)}(c)}{3!}(0.1)^4$ เมื่อ $0.1 < c < 1$

d. $\frac{f^{(4)}(c)}{4!}(0.1)^3$ เมื่อ $1 < c < 1.1$

ข้อ 10

1. ข้อใด**ไม่ถูกต้อง**

(คำตอบมีหลายคำตอบต้องตอบให้ครบทุกคำตอบจึงจะได้คะแนนเต็ม 1 คะแนน)

a. $\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$

b. ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{n^2+2}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

d. $\cos(x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!}$

e. ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ข้อ 11

1. ให้ $\vec{u} = \langle 1, a, b \rangle$ และ $\vec{v} = \langle a, 1, 2 \rangle$ เมื่อ $a \neq 0$ ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ตั้งฉากกัน
จงหาค่าของ $\left(\frac{a-b}{a}\right)^2$
2. ให้ $\vec{u} = \langle a, b, 2 \rangle$ และ $\vec{v} = \langle 1, 1, -a \rangle$ เมื่อ $a \neq 0$ ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ตั้งฉากกัน
จงหาค่าของ $\left(\frac{a+2b}{a}\right)^2$
3. ให้ $\vec{u} = \langle 1, a, 2 \rangle$ ถ้าโคไซน์แสดงทิศทางของ $\vec{u}$ กับแกน X เท่ากับ $\frac{1}{3}$ จงหาค่าของ a
4. ให้ $\vec{u} = \langle a, 2, 2 \rangle$ ถ้าโคไซน์แสดงทิศทางของ $\vec{u}$ กับแกน Z เท่ากับ $\frac{2}{3}$ จงหาค่าของ a

ข้อ 12

1. ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกัน จงหาค่าของ $\|3\vec{u} + 4\vec{v}\|$
2. ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกัน จงหาค่าของ $\|5\vec{u} - 12\vec{v}\|$
3. ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกัน จงหาค่าของ $\|7\vec{u} + 24\vec{v}\|$
4. ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกัน จงหาค่าของ $\|8\vec{u} - 15\vec{v}\|$

ข้อ 13

1. ระยะทางระหว่างจุด $(1, 2, 3)$ กับระนาบ $6x + 2y - 3z + 6 = 0$ เท่ากับเท่าใด
2. ระยะทางระหว่างระนาบ $6x + 2y + 3z - 11 = 0$ กับระนาบ $6x + 2y + 3z + 10 = 0$ เท่ากับเท่าใด
3. ระยะทางระหว่างระนาบ $6x - 2y + 3z = 10$ กับระนาบ $6x - 2y + 3z + 18 = 0$ เท่ากับเท่าใด
4. ระยะทางระหว่างจุด $(1, 2, 3)$ กับระนาบ $6x + 2y + 3z - 5 = 0$ เท่ากับเท่าใด

ข้อ 14

1. จงหามุมระหว่างเส้นตรง $x = y, z = 1$ กับระนาบ $-y + z = 0$
2. จงหามุมระหว่างเส้นตรง $x = y = z$ กับระนาบ $x + y + z = 0$
3. จงหามุมระหว่างระนาบ $x + y = 5$ กับระนาบ $-y + z = 4$
4. จงหามุมระหว่างระนาบ $x + z = 5$ กับระนาบ $x + y = 4$

ข้อ 15

1. ข้อใดไม่ถูกต้อง

(คำตอบมีหลายคำตอบต้องตอบให้ครบทุกคำตอบจึงจะได้คะแนนเต็ม 1 คะแนน)

- a. ถ้า L_1 และ L_2 ตัดกัน แล้วเราจะไม่นิยามระยะทางระหว่างเส้นตรงทั้งสอง
- b. เวกเตอร์แนวฉาก ($\vec{B}$) ไม่จำเป็นต้องมีขนาดหนึ่งหน่วยเสมอไป
- c. ถ้า L_1 และ L_2 ไม่ตัดกันและไม่ขนานกันด้วย เรากล่าวได้ว่า L_1 และ L_2 เป็นเส้นไขว้ต่างระนาบ
- d. เมื่อเราทราบอัตราเร่งขณะเวลา t เราจะสามารถหาเวกเตอร์ความเร็วที่เวลา t นั้นได้เสมอ
- e. ระยะห่างจากจุด B ไปยังจุดเชิงตั้งฉาก (M) บนเส้นตรงหนึ่ง คือระยะที่สั้นที่สุดของจุด B กับเส้นตรงนั้น ๆ

ข้อ 16

16.1 จงตรวจสอบว่าลำดับ $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2 + n} - n} \right\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

16.1 จงตรวจสอบว่าลำดับ $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n} - n} \right\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

16.1 จงตรวจสอบว่าลำดับ $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3n} - n} \right\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

16.1 จงตรวจสอบว่าลำดับ $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2 + 4n} - n} \right\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

16.2 จงตรวจสอบว่าลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก เมื่อกำหนดให้

$$a_n = (-1)^n \cos(n\pi) \quad \text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, \dots$$

16.2 จงตรวจสอบว่าลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก เมื่อกำหนดให้

$$a_n = (-1)^n \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) \quad \text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, \dots$$

16.3 จงตรวจสอบว่าลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก เมื่อกำหนดให้

$$a_n = (-1)^n \tan\left(\frac{(2n+1)\pi}{4}\right) \quad \text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, \dots$$

ข้อ 17

17.1 กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข

$$a_1 = 2 \quad \text{และ} \quad a_{n+1} = \frac{1 + a_n}{1 - a_n} \quad \text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, \dots$$

จงหาค่าของ $\sum_{n=1}^{2022} a_n$

17.1 กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข

$$a_1 = -3 \quad \text{และ} \quad a_{n+1} = \frac{1 + a_n}{1 - a_n} \quad \text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, \dots$$

จงหาค่าของ $\sum_{n=1}^{2022} a_n$

17.1 กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข

$$a_1 = 2 \quad \text{และ} \quad a_{n+1} = \frac{1 + a_n}{1 - a_n} \quad \text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, \dots$$

จงหาค่าของ $\sum_{n=1}^{2565} a_n$

17.1 กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข

$$a_1 = -3 \quad \text{และ} \quad a_{n+1} = \frac{1 + a_n}{1 - a_n} \quad \text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, \dots$$

จงหาค่าของ $\sum_{n=1}^{2565} a_n$

17.2 จงตรวจสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}$

17.2 จงตรวจสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \ln(n+2)}$

17.2 จงตรวจสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3) \ln(n+3)}$

17.2 จงตรวจสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4) \ln(n+4)}$

ข้อ 18

18.1 จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2^n}{3^{n^2}}$

18.1 จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3^n}{2^{n^2}}$

18.1 จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 4^n}{2^{n^2}}$

18.1 จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 4^n}{3^{n^2}}$

18.2 จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ หรือลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข หรือลู่ออก

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)! + (2n)!}$$

18.2 จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ หรือลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข หรือลู่ออก

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)! - (2n)!}$$

ข้อ 19

1. จงหาค่าและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (6 - 5x)^{2n}}{n \cdot 9^n}$
2. จงหาค่าและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (6x - 5)^{2n}}{n \cdot 9^n}$
3. จงหาค่าและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (6x - 5)^{2n+1}}{n \cdot 9^n}$
4. จงหาค่าและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (6 - 5x)^{2n+2}}{n \cdot 9^n}$

ข้อ 20

1. ให้ $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ จงประมาณค่าของ $\frac{1}{\sqrt[3]{1.1}}$ โดยใช้พหุนามเทย์เลอร์ 3 ของ f รอบจุด $x = 1$
พร้อมทั้งหาขอบเขตความผิดพลาด
2. ให้ $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ จงประมาณค่าของ $\frac{1}{\sqrt[3]{0.9}}$ โดยใช้พหุนามเทย์เลอร์ 3 ของ f รอบจุด $x = 1$
พร้อมทั้งหาขอบเขตความผิดพลาด

ข้อ 21

จงให้ตารางเทย์เลอร์

21.1 จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{2^n(n-1)!}$

21.1 จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{3^n(n-1)!}$

21.2 จงหาอนุกรมกำลังซึ่งมีฟังก์ชันผลบวกต่อไปนี้ $f(x) = x \left(\frac{x}{x+1} \right)^2$

21.2 จงหาอนุกรมกำลังซึ่งมีฟังก์ชันผลบวกต่อไปนี้ $f(x) = x \left(\frac{x}{x-1} \right)^2$

ข้อ 22

22.1 ให้ $\vec{a}$, $\vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ ถ้า $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ โดยที่ $\|\vec{a}\| = 1$, $\|\vec{b}\| = 2$ และ $\|\vec{c}\| = 3$
จงหาค่าของ $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

22.1 ให้ $\vec{a}$, $\vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ ถ้า $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ โดยที่ $\|\vec{a}\| = 1$, $\|\vec{b}\| = 3$ และ $\|\vec{c}\| = 4$
จงหาค่าของ $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

22.1 ให้ $\vec{a}$, $\vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ ถ้า $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ โดยที่ $\|\vec{a}\| = 2$, $\|\vec{b}\| = 3$ และ $\|\vec{c}\| = 5$
จงหาค่าของ $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

22.1 ให้ $\vec{a}$, $\vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ ถ้า $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ โดยที่ $\|\vec{a}\| = 2$, $\|\vec{b}\| = 1$ และ $\|\vec{c}\| = 7$
จงหาค่าของ $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

21.2 ให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1, 2, 1)$ และตั้งฉากกับระนาบ M ที่มีสมการเป็น $2x + y - 2z = 20$
จงหาจุดตัดของเส้นตรง L กับระนาบ M

21.2 ให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1, -2, 1)$ และตั้งฉากกับระนาบ M ที่มีสมการเป็น $2x + y - 2z = -7$
จงหาจุดตัดของเส้นตรง L กับระนาบ M

21.2 ให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1, 2, -1)$ และตั้งฉากกับระนาบ M ที่มีสมการเป็น $2x + y - 2z = -12$
จงหาจุดตัดของเส้นตรง L กับระนาบ M

21.2 ให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1, 2, 1)$ และตั้งฉากกับระนาบ M ที่มีสมการเป็น $2x + y - 2z = 25$
จงหาจุดตัดของเส้นตรง L กับระนาบ M

ข้อ 23

กำหนดให้ $L_1 : x = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$ และ $L_2 : \frac{4-x}{2} = \frac{y-1}{4} = z-5$ เป็นเส้นตรงในสามมิติ

23.1 จงหาจุดตัดของเส้นตรง L_1 และ L_2

23.2 จงหาสมการระนาบที่ผ่านเส้นตรง L_1 และ L_2

กำหนดให้ $L_1 : x = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{2}$ และ $L_2 : \frac{4-x}{2} = \frac{y-1}{5} = z-3$ เป็นเส้นตรงในสามมิติ

23.1 จงหาจุดตัดของเส้นตรง L_1 และ L_2

23.2 จงหาสมการระนาบที่ผ่านเส้นตรง L_1 และ L_2

กำหนดให้ $L_1 : x = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{3}$ และ $L_2 : \frac{4-x}{2} = \frac{y-4}{5} = z-5$ เป็นเส้นตรงในสามมิติ

23.1 จงหาจุดตัดของเส้นตรง L_1 และ L_2

23.2 จงหาสมการระนาบที่ผ่านเส้นตรง L_1 และ L_2

กำหนดให้ $L_1 : x = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{4}$ และ $L_2 : \frac{4-x}{2} = \frac{y-1}{3} = z-5$ เป็นเส้นตรงในสามมิติ

23.1 จงหาจุดตัดของเส้นตรง L_1 และ L_2

23.1 จงหาสมการระนาบที่ผ่านเส้นตรง L_1 และ L_2

ข้อ 24

1. จงหาเวกเตอร์เส้นสัมผัสหน่วย $\vec{T}$ เวกเตอร์แนวฉากหน่วย $\vec{N}$ และเวกเตอร์แนวฉากคู่ $\vec{B}$ ของเส้นโค้ง

$$\vec{r}(t) = \langle 2 \sin^2 t, \sin 2t, t \rangle \quad \text{ที่จุด } (2, 0, \frac{\pi}{2})$$

2. จงหาเวกเตอร์เส้นสัมผัสหน่วย $\vec{T}$ เวกเตอร์แนวฉากหน่วย $\vec{N}$ และเวกเตอร์แนวฉากคู่ $\vec{B}$ ของเส้นโค้ง

$$\vec{r}(t) = \langle 2 \sin^2 t, \sin 2t, t \rangle \quad \text{ที่จุด } (2, 0, -\frac{\pi}{2})$$

3. จงหาเวกเตอร์เส้นสัมผัสหน่วย $\vec{T}$ เวกเตอร์แนวฉากหน่วย $\vec{N}$ และเวกเตอร์แนวฉากคู่ $\vec{B}$ ของเส้นโค้ง

$$\vec{r}(t) = \langle 2 \cos^2 t, \sin 2t, t \rangle \quad \text{ที่จุด } (0, 0, \frac{\pi}{2})$$

4. จงหาเวกเตอร์เส้นสัมผัสหน่วย $\vec{T}$ เวกเตอร์แนวฉากหน่วย $\vec{N}$ และเวกเตอร์แนวฉากคู่ $\vec{B}$ ของเส้นโค้ง

$$\vec{r}(t) = \langle 2 \cos^2 t, \sin 2t, t \rangle \quad \text{ที่จุด } (0, 0, -\frac{\pi}{2})$$

เฉลยข้อสอบกลางภาค

ข้อ 1

1. จงหาพจน์ที่ 10 ของลำดับ $1, 10, 19, 28, \dots$

วิธีทำ จะเห็นว่า $a_n = 9n - 8$ ดังนั้น $a_{10} = 82$ #

2. จงหาพจน์ที่ 10 ของลำดับ $2, 10, 18, 26, \dots$

วิธีทำ จะเห็นว่า $a_n = 8n - 6$ ดังนั้น $a_{10} = 74$ #

3. จงหาพจน์ที่ 20 ของลำดับ $1, -4, 9, -16, 25, -36, \dots$

วิธีทำ จะเห็นว่า $a_n = (-1)^{n-1}n^2$ ดังนั้น $a_{20} = -400$ #

4. จงหาพจน์ที่ 100 ของลำดับ $1, -3, 5, -7, 9, -11, \dots$

วิธีทำ จะเห็นว่า $a_n = (-1)^{n-1}(2n - 1)$ ดังนั้น $a_{100} = -199$ #

ข้อ 2

1. กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{10} (an + 1) = 780$ จงหาค่าของ a

วิธีทำ จะเห็นว่า $a \sum_{n=1}^{10} n + 10 = a(55) + 10 = 780$ ดังนั้น $a = 14$ #

2. กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{10} (an + 1) = 890$ จงหาค่าของ a

วิธีทำ จะเห็นว่า $a \sum_{n=1}^{10} n + 10 = a(55) + 10 = 890$ ดังนั้น $a = 16$ #

3. กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{10} (an + 2) = 570$ จงหาค่าของ a

วิธีทำ จะเห็นว่า $a \sum_{n=1}^{10} n + 20 = a(55) + 20 = 570$ ดังนั้น $a = 10$ #

4. กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{10} (an + 2) = 625$ จงหาค่าของ a

วิธีทำ จะเห็นว่า $a \sum_{n=1}^{10} n + 20 = a(55) + 20 = 625$ ดังนั้น $a = 11$ #

ข้อ 3

1. กำหนดให้ $A = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{60 \cdot 61}$ จงหาค่าของ $61A$

วิธีทำ พิจารณา telescoping seires จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 61A &= 61 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{60} - \frac{1}{61} \right) \\ &= 61 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{61} \right) = 61 \cdot \frac{60}{61} = 60 \quad \# \end{aligned}$$

2. กำหนดให้ $A = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{59 \cdot 61}$ จงหาค่าของ $61A$

วิธีทำ พิจารณา telescoping seires จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 61A &= 61 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{59} - \frac{1}{61} \right) \\ &= 61 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{61} \right) = 61 \cdot \frac{30}{61} = 30 \quad \# \end{aligned}$$

3. กำหนดให้ $A = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \cdots + \frac{1}{58 \cdot 61}$ จงหาค่าของ $61A$

วิธีทำ พิจารณา telescoping seires จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 61A &= 61 \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{58} - \frac{1}{61} \right) \\ &= 61 \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{61} \right) = 61 \cdot \frac{20}{61} = 20 \quad \# \end{aligned}$$

4. กำหนดให้ $A = \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \cdots + \frac{1}{57 \cdot 61}$ จงหาค่าของ $61A$

วิธีทำ พิจารณา telescoping seires จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 61A &= 61 \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{57} - \frac{1}{61} \right) \\ &= 61 \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{61} \right) = 61 \cdot \frac{15}{61} = 15 \quad \# \end{aligned}$$

ข้อ 4

1. อนุกรมอนันต์ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^n}$ มีค่าเท่าใด

วิธีทำ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{2}{1 - \frac{1}{3}} = 3 \quad \#$

2. อนุกรมอนันต์ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5^{n-1}}$ มีค่าเท่าใด

วิธีทำ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5^{n-1}} = \frac{4}{1 - \frac{1}{5}} = 5 \quad \#$

3. อนุกรมอนันต์ $\sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot 2^{-n}$ มีค่าเท่าใด

วิธีทำ $\sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot 2^{-n} = \frac{5}{1 - \frac{1}{2}} = 10 \quad \#$

4. อนุกรมอนันต์ $\sum_{n=0}^{\infty} 6 \cdot 3^{-n}$ มีค่าเท่าใด

วิธีทำ $\sum_{n=0}^{\infty} 6 \cdot 3^{-n} = \frac{6}{1 - \frac{1}{3}} = 9 \quad \#$

ข้อ 5

1. กำหนดให้ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 3$ จงหาค่าของ $60x$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = 3$ จะได้ว่า $x = \frac{2}{3}$ ดังนั้น $60x = 40 \quad \#$

2. กำหนดให้ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 4$ จงหาค่าของ $60x$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = 4$ จะได้ว่า $x = \frac{3}{4}$ ดังนั้น $60x = 45 \quad \#$

3. กำหนดให้ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 5$ จงหาค่าของ $60x$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = 5$ จะได้ว่า $x = \frac{4}{5}$ ดังนั้น $60x = 48 \quad \#$

4. กำหนดให้ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 6$ จงหาค่าของ $60x$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = 6$ จะได้ว่า $x = \frac{5}{6}$ ดังนั้น $60x = 50 \quad \#$

ข้อ 6

1. จงหาค่า (R) แห่งการลู่อเข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{3^n}$

วิธีทำ

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} \cdot 3^{n+1} = 3 \quad \#$$

2. จงหาค่า (R) แห่งการลู่อเข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n}$

วิธีทำ

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \cdot 2^{n+1} = 2 \quad \#$$

3. จงหาค่า (R) แห่งการลู่อเข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{4^n}$

วิธีทำ

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4^n} \cdot 4^{n+1} = 4 \quad \#$$

4. จงหาค่า (R) แห่งการลู่อเข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$

วิธีทำ

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1 \quad \#$$

ข้อ 7

1. ช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n}$ ตรงกับข้อใด

a. $(0, 1)$

b. $(0, 1]$

c. $[0, 1)$

d. $[0, 1]$

วิธีทำ พิจารณา

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2x-1)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(2x-1)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |2x-1| \cdot \frac{n}{n+1} = |2x-1| < 1$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |2x-1| &< 1 \\ -1 &< 2x-1 < 1 \\ 0 &< 2x < 2 \\ 0 &< x < 1 \end{aligned}$$

พิจารณา

กรณี $x = 0$ จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า (อนุกรมสลับ)

กรณี $x = 1$ จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก ($p = 1$)

สรุปได้ว่าช่วงแห่งการลู่เข้าคือ $[0, 1)$ #

2. ช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-1)^{2n}}{n}$ ตรงกับข้อใด

a. $(0, 1)$

b. $(0, 1]$

c. $[0, 1)$

d. $[0, 1]$

วิธีทำ พิจารณา

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2x-1)^{2n+2}}{n+1} \cdot \frac{n}{(2x-1)^{2n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |2x-1|^2 \cdot \frac{n}{n+1} = |2x-1|^2 < 1$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |2x-1| &< 1 \\ -1 &< 2x-1 < 1 \\ 0 &< 2x < 2 \\ 0 &< x < 1 \end{aligned}$$

พิจารณา $x = 0, 1$ จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก ($p = 1$)

สรุปได้ว่าช่วงแห่งการลู่เข้าคือ $(0, 1)$ #

ข้อ 8

1. ข้อใดคือพหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 3 รอบจุด $x = 1$ ของฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt[3]{x}$

a. $1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{10}{27}(x-1)^3$

b. $1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{2}{9}(x-1)^2 + \frac{10}{27}(x-1)^3$

c. $1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{2}{9}(x-1)^2 + \frac{8}{81}(x-1)^3$

d. $1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{5}{81}(x-1)^3$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sqrt[3]{x} & f(1) = 1 \\ f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} & f'(1) = \frac{1}{3} \\ f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} & f''(1) = -\frac{2}{9} \\ f'''(x) = \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}} & f'''(1) = \frac{10}{27} \end{array}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} T_3(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 \\ &= 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{5}{81}(x-1)^3 \quad \# \end{aligned}$$

2. ข้อใดคือพหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 3 รอบจุด $x = 1$ ของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

a. $1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{2}{9}(x-1)^2 + \frac{14}{81}(x-1)^3$

b. $1 - \frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{9}(x-1)^2 - \frac{28}{27}(x-1)^3$

c. $1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{2}{9}(x-1)^2 + \frac{28}{27}(x-1)^3$

d. $1 - \frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{9}(x-1)^2 - \frac{14}{81}(x-1)^3$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{array}{ll} f(x) = x^{-\frac{1}{3}} & f(1) = 1 \\ f'(x) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} & f'(1) = -\frac{1}{3} \\ f''(x) = \frac{4}{9}x^{-\frac{7}{3}} & f''(1) = \frac{4}{9} \\ f'''(x) = -\frac{28}{27}x^{-\frac{10}{3}} & f'''(1) = -\frac{28}{27} \end{array}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} T_3(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 \\ &= 1 - \frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{9}(x-1)^2 - \frac{14}{81}(x-1)^3 \quad \# \end{aligned}$$

ข้อ 9

1. ข้อใดคือ**เศษเหลือ** ของการประมาณ $\sqrt[3]{1.1}$ โดยใช้ฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ด้วยพหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 3 รอบจุด 1

- a. $\frac{f^{(3)}(c)}{3!}(0.1)^3$ เมื่อ $0 < c < 1$ c. $\frac{f^{(4)}(c)}{4!}(0.1)^4$ เมื่อ $0 < c < 1$
b. $\frac{f^{(4)}(c)}{4!}(0.1)^4$ เมื่อ $1 < c < 1.1$ d. $\frac{f^{(3)}(c)}{3!}(0.1)^3$ เมื่อ $1 < c < 1$

วิธีทำ เศษเหลือเท่ากับ $R_3(1.1)$ เมื่อ $1 < c < 1.1$ นั่นคือ

$$R_3(1.1) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(1.1 - 1)^4 = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(0.1)^4$$

2. ข้อใดคือ**เศษเหลือ** ของการประมาณ $\sqrt[3]{0.1}$ โดยใช้ฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ด้วยพหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 3 รอบจุด 1

- a. $\frac{f^{(4)}(c)}{4!}(0.9)^3$ เมื่อ $0.1 < c < 1$ c. $\frac{f^{(3)}(c)}{3!}(0.9)^4$ เมื่อ $0.1 < c < 1$
b. $\frac{f^{(3)}(c)}{3!}(0.1)^4$ เมื่อ $0.1 < c < 1$ d. $\frac{f^{(4)}(c)}{4!}(0.1)^3$ เมื่อ $1 < c < 1.1$

วิธีทำ เศษเหลือเท่ากับ $R_3(0.1)$ เมื่อ $0.1 < c < 1$ นั่นคือ

$$R_3(0.1) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(0.1 - 1)^4 = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(0.9)^4$$

ข้อ 10

1. ข้อใด**ไม่ถูกต้อง**

(คำตอบมีหลายคำตอบต้องตอบให้ครบทุกคำตอบจึงจะได้คะแนนเต็ม 1 คะแนน)

- a. **ไม่ถูกต้อง** $\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$
b. **ไม่ถูกต้อง** ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
c. **ถูกต้อง** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{n^2+2}$ เป็นอนุกรมลู่ออก
d. **ถูกต้อง** $\cos(x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!}$
e. **ไม่ถูกต้อง** ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ข้อ 11

1. ให้ $\vec{u} = \langle 1, a, b \rangle$ และ $\vec{v} = \langle a, 1, 2 \rangle$ เมื่อ $a \neq 0$ ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ตั้งฉากกัน
จงหาค่าของ $\left(\frac{a-b}{a}\right)^2$

วิธีทำ เนื่องจาก $0 = \vec{u} \cdot \vec{v} = a + a + 2b = 2a + 2b$ นั่นคือ $a = -b$
ดังนั้น $\left(\frac{a-b}{a}\right)^2 = \left(\frac{-b-b}{-b}\right)^2 = \left(\frac{-2b}{-b}\right)^2 = 2^2 = 4 \quad \#$

2. ให้ $\vec{u} = \langle a, b, 2 \rangle$ และ $\vec{v} = \langle 1, 1, -a \rangle$ เมื่อ $a \neq 0$ ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ตั้งฉากกัน
จงหาค่าของ $\left(\frac{a+2b}{a}\right)^2$

วิธีทำ เนื่องจาก $0 = \vec{u} \cdot \vec{v} = a + b - 2a = b - a$ นั่นคือ $a = b$
ดังนั้น $\left(\frac{a+2b}{a}\right)^2 = \left(\frac{a+2a}{a}\right)^2 = \left(\frac{3a}{a}\right)^2 = 3^2 = 9 \quad \#$

3. ให้ $\vec{u} = \langle 1, a, 2 \rangle$ ถ้าโคไซน์แสดงทิศทางของ $\vec{u}$ กับแกน X เท่ากับ $\frac{1}{3}$ จงหาค่าของ a

วิธีทำ จะเห็นว่าโคไซน์แสดงทิศทางของ $\vec{u}$ กับแกน X เท่ากับ

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|\vec{u}\|} &= \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{1+a^2+2^2}} &= \frac{1}{3} \\ a^2 + 5 &= 9 \\ a^2 &= 4 \quad \therefore a = \pm 2 \quad \# \end{aligned}$$

4. ให้ $\vec{u} = \langle a, 2, 2 \rangle$ ถ้าโคไซน์แสดงทิศทางของ $\vec{u}$ กับแกน Z เท่ากับ $\frac{2}{3}$ จงหาค่าของ a

วิธีทำ จะเห็นว่าโคไซน์แสดงทิศทางของ $\vec{u}$ กับแกน Z เท่ากับ

$$\begin{aligned}\frac{2}{\|\vec{u}\|} &= \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{a^2+2^2+2^2}} &= \frac{2}{3} \\ a^2 + 8 &= 9 \\ a^2 &= 1 \quad \therefore a = \pm 1 \quad \# \end{aligned}$$

ข้อ 12

1. ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกัน จงหาค่าของ $\|3\vec{u} + 4\vec{v}\|$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\|3\vec{u} + 4\vec{v}\|^2 &= 9\|\vec{u}\|^2 + 24\vec{u} \cdot \vec{v} + 16\|\vec{v}\|^2 = 9(1^2) + 24(0) + 16(1^2) = 25 \\ \|3\vec{u} + 4\vec{v}\| &= 5 \quad \# \end{aligned}$$

2. ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกัน จงหาค่าของ $\|5\vec{u} - 12\vec{v}\|$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\|5\vec{u} - 12\vec{v}\|^2 &= 25\|\vec{u}\|^2 - 120\vec{u} \cdot \vec{v} + 144\|\vec{v}\|^2 = 25(1^2) - 120(0) + 144(1^2) = 169 \\ \|5\vec{u} - 12\vec{v}\| &= 13 \quad \# \end{aligned}$$

3. ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกัน จงหาค่าของ $\|7\vec{u} + 24\vec{v}\|$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\|7\vec{u} + 24\vec{v}\|^2 &= 49\|\vec{u}\|^2 + 336\vec{u} \cdot \vec{v} + 576\|\vec{v}\|^2 = 49(1^2) + 336(0) + 576(1^2) = 625 \\ \|7\vec{u} + 24\vec{v}\| &= 25 \quad \# \end{aligned}$$

4. ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกัน จงหาค่าของ $\|8\vec{u} - 15\vec{v}\|$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\|8\vec{u} - 15\vec{v}\|^2 &= 64\|\vec{u}\|^2 - 240\vec{u} \cdot \vec{v} + 225\|\vec{v}\|^2 = 64(1^2) - 240(0) + 225(1^2) = 289 \\ \|8\vec{u} - 15\vec{v}\| &= 17 \quad \# \end{aligned}$$

ข้อ 13

1. ระยะทางระหว่างจุด $(1, 2, 3)$ กับระนาบ $6x + 2y - 3z + 6 = 0$ เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ จะได้ว่า

$$d = \frac{|6(1) + 2(2) - 3(3) + 6|}{\sqrt{6^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \frac{7}{7} = 1 \quad \#$$

2. ระยะทางระหว่างระนาบ $6x + 2y + 3z - 11 = 0$ กับระนาบ $6x + 2y + 3z + 10 = 0$ เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ จะได้ว่า

$$d = \frac{|-11 - 10|}{\sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{21}{7} = 3 \quad \#$$

3. ระยะทางระหว่างระนาบ $6x - 2y + 3z = 10$ กับระนาบ $6x - 2y + 3z + 18 = 0$ เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ จะได้ว่า

$$d = \frac{|-10 - 18|}{\sqrt{6^2 + (-2)^2 + 3^2}} = \frac{28}{7} = 4 \quad \#$$

4. ระยะทางระหว่างจุด $(1, 2, 3)$ กับระนาบ $6x + 2y + 3z - 5 = 0$ เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ จะได้ว่า

$$d = \frac{|6(1) + 2(2) + 3(3) - 5|}{\sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{14}{7} = 2 \quad \#$$

ข้อ 14

1. จงหามุมระหว่างเส้นตรง $x = y, z = 1$ กับระนาบ $-y + z = 0$

วิธีทำ จะเห็นว่า $\vec{A} = \langle 1, 1, 0 \rangle$ และ $\vec{N} = \langle 0, -1, 1 \rangle$ จะได้ว่า

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{N}}{\|\vec{A}\| \cdot \|\vec{N}\|} = \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \quad \therefore \theta = 120^\circ$$

ดังนั้นมุมระหว่างเส้นตรงกับระนาบคือ $|90^\circ - 120^\circ| = 30^\circ$ #

2. จงหามุมระหว่างเส้นตรง $x = y = z$ กับระนาบ $x + y + z = 0$

วิธีทำ จะเห็นว่า $\vec{A} = \langle 1, 1, 1 \rangle$ และ $\vec{N} = \langle 1, 1, 1 \rangle$ จะได้ว่า $\vec{A} = \vec{N}$ นั่นคือ $\vec{A}$ ขนานกัน $\vec{N}$ และทิศเดียวกัน (0°)

ดังนั้นมุมระหว่างเส้นตรงกับระนาบคือ $|90^\circ - 0^\circ| = 90^\circ$ #

3. จงหามุมระหว่างระนาบ $x + y = 5$ กับระนาบ $-y + z = 4$

วิธีทำ จะเห็นว่า $\vec{N}_1 = \langle 1, 1, 0 \rangle$ และ $\vec{N}_2 = \langle 0, -1, 1 \rangle$ จะได้ว่า

$$\cos \theta = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\|\vec{N}_1\| \cdot \|\vec{N}_2\|} = \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$$

ดังนั้นมุมระหว่างระนาบคือ 120° #

4. จงหามุมระหว่างระนาบ $x + z = 5$ กับระนาบ $x + y = 4$

วิธีทำ จะเห็นว่า $\vec{N}_1 = \langle 1, 0, 1 \rangle$ และ $\vec{N}_2 = \langle 1, 1, 0 \rangle$ จะได้ว่า

$$\cos \theta = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\|\vec{N}_1\| \cdot \|\vec{N}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

ดังนั้นมุมระหว่างระนาบคือ 60° #

ข้อ 15

1. ข้อใดไม่ถูกต้อง

(คำตอบมีหลายคำตอบต้องตอบให้ครบทุกคำตอบจึงจะได้คะแนนเต็ม 1 คะแนน)

- a. **ถูกต้อง** ถ้า L_1 และ L_2 ตัดกัน แล้วเราจะไม่นิยามระยะทางระหว่างเส้นตรงทั้งสอง
- b. **ไม่ถูกต้อง** เวกเตอร์แนวฉาก ($\vec{B}$) ไม่จำเป็นต้องมีขนาดหนึ่งหน่วยเสมอไป
- c. **ถูกต้อง** ถ้า L_1 และ L_2 ไม่ตัดกันและไม่ขนานกันด้วย เรากล่าวได้ว่า L_1 และ L_2 เป็นเส้นไขว้ต่างระนาบ
- d. **ไม่ถูกต้อง** เมื่อเราทราบอัตราเร่งขณะเวลา t เราจะสามารถหาเวกเตอร์ความเร็วที่เวลา t นั้นได้เสมอ
- e. **ถูกต้อง** ระยะห่างจากจุด B ไปยังจุดเชิงตั้งฉาก (M) บนเส้นตรงหนึ่ง คือระยะที่สั้นที่สุดของจุด B กับเส้นตรงนั้น ๆ

ข้อ 16

16.1 จงตรวจสอบว่าลำดับ $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2 + n} - n} \right\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n} - n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n} - n} \cdot \frac{\sqrt{n^2 + n} + n}{\sqrt{n^2 + n} + n} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n} + n}{(n^2 + n) - n^2} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2(1 + \frac{1}{n})} + n}{n} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + n}{n} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right)}{n} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right) = (\sqrt{1 + 0} + 1) = 2\end{aligned}$$

ดังนั้น $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2 + n} - n} \right\}$ เป็นลำดับลู่เข้า #

16.1 จงตรวจสอบว่าลำดับ $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n} - n} \right\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n} - n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n} - n} \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 2n} + n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2n} + n}{(n^2 + 2n) - n^2} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2(1 + \frac{2}{n})} + n}{2n} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + n}{2n} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1\right)}{2n} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1\right) = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + 0} + 1) = 1\end{aligned}$$

ดังนั้น $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n} - n} \right\}$ เป็นลำดับลู่เข้า #

16.1 จงตรวจสอบว่าลำดับ $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3n} - n} \right\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3n} - n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3n} - n} \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 3n} + n}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 3n} + n}{(n^2 + 3n) - n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2(1 + \frac{3}{n})} + n}{3n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + n}{3n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\left(\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1\right)}{3n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1 \right) = \frac{1}{3} (\sqrt{1 + 0} + 1) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3n} - n} \right\}$ เป็นลำดับลู่เข้า #

16.1 จงตรวจสอบว่าลำดับ $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2 + 4n} - n} \right\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 4n} - n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 4n} - n} \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 4n} + n}{\sqrt{n^2 + 4n} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 4n} + n}{(n^2 + 4n) - n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2(1 + \frac{4}{n})} + n}{4n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + n}{4n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\left(\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + 1\right)}{4n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + 1 \right) = \frac{1}{4} (\sqrt{1 + 0} + 1) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2 + 4n} - n} \right\}$ เป็นลำดับลู่เข้า #

16.2 จงตรวจสอบว่าลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก เมื่อกำหนดให้

$$a_n = (-1)^n \cos(n\pi) \quad \text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, \dots$$

วิธีทำ พิจารณาค่า a_n เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{array}{ll} a_1 = (-1)^1 \cos(\pi) & a_1 = (-1)(-1) = 1 \\ a_2 = (-1)^2 \cos(2\pi) & a_2 = (1)(1) = 1 \\ a_3 = (-1)^3 \cos(3\pi) & a_3 = (-1)(-1) = 1 \\ a_4 = (-1)^4 \cos(4\pi) & a_4 = (1)(1) = 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n = (-1)^n \cos(n\pi) & a_n = 1 \end{array}$$

ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ นั่นคือ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า $\#$

16.2 จงตรวจสอบว่าลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก เมื่อกำหนดให้

$$a_n = (-1)^n \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) \quad \text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, \dots$$

วิธีทำ พิจารณาค่า a_n เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{array}{ll} a_1 = (-1)^1 \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) & a_1 = (-1)(-1) = 1 \\ a_2 = (-1)^2 \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) & a_2 = (1)(1) = 1 \\ a_3 = (-1)^3 \sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) & a_3 = (-1)(-1) = 1 \\ a_4 = (-1)^4 \sin\left(\frac{9\pi}{2}\right) & a_4 = (1)(1) = 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n = (-1)^n \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) & a_n = 1 \end{array}$$

ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ นั่นคือ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า $\#$

16.3 จงตรวจสอบว่าลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก เมื่อกำหนดให้

$$a_n = (-1)^n \tan\left(\frac{(2n+1)\pi}{4}\right) \quad \text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, \dots$$

วิธีทำ พิจารณาค่า a_n เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{array}{ll} a_1 = (-1)^1 \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) & a_1 = (-1)(-1) = 1 \\ a_2 = (-1)^2 \tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) & a_2 = (1)(1) = 1 \\ a_3 = (-1)^3 \tan\left(\frac{7\pi}{4}\right) & a_3 = (-1)(-1) = 1 \\ a_4 = (-1)^4 \tan\left(\frac{9\pi}{4}\right) & a_4 = (1)(1) = 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n = (-1)^n \tan\left(\frac{(2n+1)\pi}{4}\right) & a_n = 1 \end{array}$$

ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ นั่นคือ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า $\#$

ข้อ 17

17.1 กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข

$$a_1 = 2 \quad \text{และ} \quad a_{n+1} = \frac{1 + a_n}{1 - a_n} \quad \text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, \dots$$

จงหาค่าของ $\sum_{n=1}^{2022} a_n$

วิธีทำ พิจารณาค่า a_n เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= \frac{1+2}{1-2} = -3 \\ a_3 &= \frac{1-3}{1-(-3)} = -\frac{1}{2} \\ a_4 &= \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \\ a_5 &= \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

ดังนั้นลำดับนี้มีเพียง 4 ค่าเท่านั้น เนื่องจาก $2022 = 4(505) + 2$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2022} a_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2022} \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{2017} + a_{2018} + a_{2019} + a_{2020}) + a_{2021} + a_{2022} \\ &= \left(2 - 3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(2 - 3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(2 - 3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + 2 - 3 \\ &= 505 \left(2 - 3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - 1 \\ &= 505 \left(-\frac{7}{6}\right) - 1 \\ &= -\frac{3541}{6} \quad \# \end{aligned}$$

17.1 กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข

$$a_1 = -3 \text{ และ } a_{n+1} = \frac{1 + a_n}{1 - a_n} \text{ เมื่อ } n = 1, 2, 3, \dots$$

จงหาค่าของ $\sum_{n=1}^{2022} a_n$

วิธีทำ พิจารณาค่า a_n เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} a_1 &= -3 \\ a_2 &= \frac{1 - 3}{1 - (-3)} = -\frac{1}{2} \\ a_3 &= \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \\ a_4 &= \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 2 \\ a_5 &= \frac{1 + 2}{1 - 2} = -3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

ดังนั้นลำดับนี้มีเพียง 4 ค่าเท่านั้น เนื่องจาก $2022 = 4(505) + 2$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2022} a_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2022} \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{2017} + a_{2018} + a_{2019} + a_{2020}) + a_{2021} + a_{2022} \\ &= \left(-3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 2\right) + \left(-3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 2\right) + \cdots + \left(-3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 2\right) - 3 - \frac{1}{2} \\ &= 505 \left(-3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 2\right) - \frac{7}{2} \\ &= 505 \left(-\frac{7}{6}\right) - \frac{7}{2} \\ &= -\frac{1778}{3} \quad \# \end{aligned}$$

17.1 กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข

$$a_1 = 2 \text{ และ } a_{n+1} = \frac{1 + a_n}{1 - a_n} \text{ เมื่อ } n = 1, 2, 3, \dots$$

จงหาค่าของ $\sum_{n=1}^{2565} a_n$

วิธีทำ พิจารณาค่า a_n เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= \frac{1+2}{1-2} = -3 \\ a_3 &= \frac{1-3}{1-(-3)} = -\frac{1}{2} \\ a_4 &= \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \\ a_5 &= \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

ดังนั้นลำดับนี้มีเพียง 4 ค่าเท่านั้น เนื่องจาก $2565 = 4(641) + 1$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2565} a_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2565} \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{2561} + a_{2562} + a_{2563} + a_{2564}) + a_{2565} \\ &= \left(2 - 3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(2 - 3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(2 - 3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + 2 \\ &= 641 \left(2 - 3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + 2 \\ &= 641 \left(-\frac{7}{6}\right) + 2 \\ &= -\frac{4475}{6} \quad \# \end{aligned}$$

17.1 กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข

$$a_1 = -3 \text{ และ } a_{n+1} = \frac{1+a_n}{1-a_n} \text{ เมื่อ } n = 1, 2, 3, \dots$$

จงหาค่าของ $\sum_{n=1}^{2565} a_n$

วิธีทำ พิจารณาค่า a_n เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} a_1 &= -3 \\ a_2 &= \frac{1-3}{1-(-3)} = -\frac{1}{2} \\ a_3 &= \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \\ a_4 &= \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2 \\ a_5 &= \frac{1+2}{1-2} = -3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

ดังนั้นลำดับนี้มีเพียง 4 ค่าเท่านั้น เนื่องจาก $2565 = 4(641) + 1$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2565} a_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2565} \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{2561} + a_{2562} + a_{2563} + a_{2564}) + a_{2565} \\ &= \left(-3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 2\right) + \left(-3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 2\right) + \cdots + \left(-3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 2\right) - 3 \\ &= 641 \left(2 - 3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - 3 \\ &= 641 \left(-\frac{7}{6}\right) - 3 \\ &= -\frac{4505}{6} \quad \# \end{aligned}$$

17.2 จงตรวจสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}$

วิธีทำ ให้ $f(x) = \frac{1}{(x+1) \ln(x+1)}$ เมื่อ $x \geq 1$ จะได้ว่า

$$f'(x) = -((x+1) \ln(x+1))^{-2} \left(\ln(x+1) + (x+1) \cdot \frac{1}{x+1} \right) = -\frac{\ln(x+1) + 1}{(x+1) \ln(x+1)} < 0$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันลด พิจารณา

$$\begin{aligned} t_n &= \int_1^n f(x) dx \\ &= \int_1^n \frac{1}{(x+1) \ln(x+1)} dx = \int_1^n \frac{1}{\ln(x+1)} \cdot \frac{1}{x+1} dx \\ &= \int_1^n \frac{1}{\ln(x+1)} d \ln(x+1) \\ &= [\ln(\ln(x+1))]_1^n = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} t_n &= +\infty \end{aligned}$$

จะได้ว่า $\{t_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า สรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า #

17.2 จงตรวจสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \ln(n+2)}$

วิธีทำ ให้ $f(x) = \frac{1}{(x+2) \ln(x+2)}$ เมื่อ $x \geq 1$ จะได้ว่า

$$f'(x) = -((x+2) \ln(x+2))^{-2} \left(\ln(x+2) + (x+2) \cdot \frac{1}{x+2} \right) = -\frac{\ln(x+2) + 1}{(x+2) \ln(x+2)} < 0$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันลด พิจารณา

$$\begin{aligned} t_n &= \int_1^n f(x) dx \\ &= \int_1^n \frac{1}{(x+2) \ln(x+2)} dx = \int_1^n \frac{1}{\ln(x+2)} \cdot \frac{1}{x+2} dx \\ &= \int_1^n \frac{1}{\ln(x+2)} d \ln(x+2) \\ &= [\ln(\ln(x+2))]_1^n = \ln(\ln(n+2)) - \ln(\ln 3) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} t_n &= +\infty \end{aligned}$$

จะได้ว่า $\{t_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า สรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \ln(n+2)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า #

17.2 จงตรวจสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3) \ln(n+3)}$

วิธีทำ ให้ $f(x) = \frac{1}{(x+3) \ln(x+3)}$ เมื่อ $x \geq 1$ จะได้ว่า

$$f'(x) = -((x+3) \ln(x+3))^{-2} \left(\ln(x+3) + (x+3) \cdot \frac{1}{x+3} \right) = -\frac{\ln(x+3) + 1}{(x+3) \ln(x+3)} < 0$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันลด พิจารณา

$$\begin{aligned} t_n &= \int_1^n f(x) dx \\ &= \int_1^n \frac{1}{(x+3) \ln(x+3)} dx = \int_1^n \frac{1}{\ln(x+3)} \cdot \frac{1}{x+3} dx \\ &= \int_1^n \frac{1}{\ln(x+3)} d \ln(x+3) \\ &= [\ln(\ln(x+3))]_1^n = \ln(\ln(n+3)) - \ln(\ln 4) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} t_n &= +\infty \end{aligned}$$

จะได้ว่า $\{t_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า สรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3) \ln(n+3)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า #

17.2 จงตรวจสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4) \ln(n+4)}$

วิธีทำ ให้ $f(x) = \frac{1}{(x+4) \ln(x+4)}$ เมื่อ $x \geq 1$ จะได้ว่า

$$f'(x) = -((x+4) \ln(x+4))^{-2} \left(\ln(x+4) + (x+4) \cdot \frac{1}{x+4} \right) = -\frac{\ln(x+4) + 1}{(x+4) \ln(x+4)} < 0$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันลด พิจารณา

$$\begin{aligned} t_n &= \int_1^n f(x) dx \\ &= \int_1^n \frac{1}{(x+4) \ln(x+4)} dx = \int_1^n \frac{1}{\ln(x+4)} \cdot \frac{1}{x+4} dx \\ &= \int_1^n \frac{1}{\ln(x+4)} d \ln(x+4) \\ &= [\ln(\ln(x+4))]_1^n = \ln(\ln(n+4)) - \ln(\ln 5) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} t_n &= +\infty \end{aligned}$$

จะได้ว่า $\{t_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า สรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4) \ln(n+4)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า #

ข้อ 18

18.1 จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2^n}{3^{n^2}}$

วิธีทำ พิจารณาอนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^{n^2}} \quad \text{และ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n^2}}$$

ใช้การทดสอบอัตราส่วน

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2}{3^{(n+1)^2}} \cdot \frac{3^{n^2}}{n^2} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{3^{(n^2+2n+1)}} \cdot \frac{3^{n^2}}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \cdot \frac{1}{3^{2n+1}} \\ &= (1 + 0 + 0) \cdot 0 = 0 < 1 \end{aligned}$$

จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^{n^2}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และพิจารณา

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n+1}}{3^{(n+1)^2}} \cdot \frac{3^{n^2}}{2^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot 2}{3^{(n^2+2n+1)}} \cdot \frac{3^{n^2}}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3^{2n+1}} = 0 < 1$$

จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n^2}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า สรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2^n}{3^{n^2}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า $\#$

18.1 จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3^n}{2^{n^2}}$

วิธีทำ พิจารณาอนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n^2}} \quad \text{และ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n^2}}$$

ใช้การทดสอบอัตราส่วน

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2}{2^{(n+1)^2}} \cdot \frac{2^{n^2}}{n^2} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{2^{(n^2+2n+1)}} \cdot \frac{2^{n^2}}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \cdot \frac{1}{2^{2n+1}} \\ &= (1 + 0 + 0) \cdot 0 = 0 < 1 \end{aligned}$$

จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n^2}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และพิจารณา

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^{n+1}}{2^{(n+1)^2}} \cdot \frac{2^{n^2}}{3^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cdot 3}{2^{(n^2+2n+1)}} \cdot \frac{2^{n^2}}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2^{2n+1}} = 0 < 1$$

จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n^2}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า สรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3^n}{2^{n^2}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า $\#$

18.1 จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 4^n}{2^{n^2}}$

วิธีทำ พิจารณาอนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n^2}} \quad \text{และ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{2^{n^2}}$$

ใช้การทดสอบอัตราส่วน

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2}{2^{(n+1)^2}} \cdot \frac{2^{n^2}}{n^2} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{2^{(n^2+2n+1)}} \cdot \frac{2^{n^2}}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \cdot \frac{1}{2^{2n+1}} \\ &= (1 + 0 + 0) \cdot 0 = 0 < 1 \end{aligned}$$

จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n^2}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และพิจารณา

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{4^{n+1}}{2^{(n+1)^2}} \cdot \frac{2^{n^2}}{4^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n \cdot 4}{2^{(n^2+2n+1)}} \cdot \frac{2^{n^2}}{4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{2^{2n+1}} = 0 < 1$$

จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{2^{n^2}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า สรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 4^n}{2^{n^2}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า #

18.1 จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 4^n}{3^{n^2}}$

วิธีทำ พิจารณาอนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^{n^2}} \quad \text{และ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{n^2}}$$

ใช้การทดสอบอัตราส่วน

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2}{3^{(n+1)^2}} \cdot \frac{3^{n^2}}{n^2} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{3^{(n^2+2n+1)}} \cdot \frac{3^{n^2}}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \cdot \frac{1}{3^{2n+1}} \\ &= (1 + 0 + 0) \cdot 0 = 0 < 1 \end{aligned}$$

จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^{n^2}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และพิจารณา

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{4^{n+1}}{3^{(n+1)^2}} \cdot \frac{3^{n^2}}{4^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n \cdot 4}{3^{(n^2+2n+1)}} \cdot \frac{3^{n^2}}{4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{3^{2n+1}} = 0 < 1$$

จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{n^2}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า สรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 4^n}{3^{n^2}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า #

18.2 จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ หรือลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข หรือลู่ออก

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)! + (2n)!}$$

วิธีทำ พิจารณา

$$a_n = \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)! + (2n)!} = \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)(2n)! + (2n)!} = \frac{(-1)^n n!}{[(2n+1)+1](2n)!} = \frac{(-1)^n n!}{(2n+2)(2n)!}$$

ใช้การทดสอบอัตราส่วน

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{(2n+4)(2n+2)!} \cdot \frac{(2n+2)(2n)!}{(-1)^n n!} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+2)}{(2n+4)(2n+2)(2n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{(2n+4)(2n+1)} = 0 < 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)! + (2n)!}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

18.2 จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ หรือลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข หรือลู่ออก

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)! - (2n)!}$$

วิธีทำ พิจารณา

$$a_n = \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)! - (2n)!} = \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)(2n)! - (2n)!} = \frac{(-1)^n n!}{[(2n+1)-1](2n)!} = \frac{(-1)^n n!}{(2n)(2n)!}$$

ใช้การทดสอบอัตราส่วน

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{(2n+2)(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)(2n)!}{(-1)^n n!} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n)}{(2n+2)(2n+2)(2n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(2n+2)(2n+1)} = 0 < 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)! - (2n)!}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

ข้อ 19

1. จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (6-5x)^{2n}}{n \cdot 9^n}$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} (6-5x)^{2n+2}}{(n+1)9^{n+1}} \cdot \frac{n \cdot 9^n}{(-1)^n (6-5x)^{2n}} \right| &= |5x-6|^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{9(n+1)} \\ &= \frac{1}{9} |5x-6|^2 < 1 \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |5x-6| &< 3 \\ -3 &< 5x-6 < 3 \\ -\frac{3}{5} &< x - \frac{6}{5} < \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} &< x < \frac{9}{5} \end{aligned}$$

จะได้ว่ารัศมีแห่งการลู่เข้าคือ $\frac{3}{5}$ ตรวจสอบการลู่เข้าเมื่อ
สำหรับ $x = \frac{3}{5} = \frac{9}{5}$ จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (6-5x)^{2n}}{n \cdot 9^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

เป็นอนุกรมลู่เข้า (อนุกรมสลับ)

สรุปได้ว่า รัศมีแห่งการลู่เข้าคือ $\frac{3}{5}$ ช่วงแห่งการลู่เข้าคือ $[\frac{3}{5}, \frac{9}{5}]$ #

2. จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (6x-5)^{2n}}{n \cdot 9^n}$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} (6x-5)^{2n+2}}{(n+1)9^{n+1}} \cdot \frac{n \cdot 9^n}{(-1)^n (6x-5)^{2n}} \right| &= |6x-5|^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{9(n+1)} \\ &= \frac{1}{9} |6x-5|^2 < 1 \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |6x-5| &< 3 \\ -3 &< 6x-5 < 3 \\ -\frac{1}{2} &< x - \frac{5}{6} < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} &< x < \frac{4}{3} \end{aligned}$$

จะได้ว่ารัศมีแห่งการลู่เข้าคือ $\frac{1}{2}$ ตรวจสอบการลู่เข้าเมื่อ
สำหรับ $x = \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (6x-5)^{2n}}{n \cdot 9^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

เป็นอนุกรมลู่เข้า (อนุกรมสลับ)

สรุปได้ว่า รัศมีแห่งการลู่เข้าคือ $\frac{1}{2}$ ช่วงแห่งการลู่เข้าคือ $[\frac{1}{3}, \frac{4}{3}]$ #

3. จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (6x-5)^{2n+1}}{n \cdot 9^n}$

วิธีทำ พิจารณา

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} (6x-5)^{2n+3}}{(n+1)9^{n+1}} \cdot \frac{n \cdot 9^n}{(-1)^n (6x-5)^{2n+1}} \right| = |6x-5|^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{9(n+1)} \\ = \frac{1}{9} |6x-5|^2 < 1$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |6x-5| &< 3 \\ -3 &< 6x-5 < 3 \\ -\frac{1}{2} &< x - \frac{5}{6} < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} &< x < \frac{4}{3} \end{aligned}$$

จะได้ว่ารัศมีแห่งการลู่เข้าคือ $\frac{1}{2}$ ตรวจสอบการลู่เข้าเมื่อ

กรณี $x = \frac{1}{3}$ จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (6x-5)^{2n+1}}{n \cdot 9^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-3(-1)^n}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า (อนุกรมสลับ)

กรณี $x = \frac{4}{3}$ จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (6x-5)^{2n+1}}{n \cdot 9^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(-1)^n}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า (อนุกรมสลับ)

สรุปได้ว่า รัศมีแห่งการลู่เข้าคือ $\frac{1}{2}$ ช่วงแห่งการลู่เข้าคือ $[\frac{1}{3}, \frac{4}{3}]$ #

4. จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (6-5x)^{2n+2}}{n \cdot 9^n}$

วิธีทำ พิจารณา

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} (6-5x)^{2n+4}}{(n+1)9^{n+1}} \cdot \frac{n \cdot 9^n}{(-1)^n (6-5x)^{2n+2}} \right| = |5x-6|^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{9(n+1)} \\ = \frac{1}{9} |5x-6|^2 < 1$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |5x-6| &< 3 \\ -3 &< 5x-6 < 3 \\ -\frac{3}{5} &< x - \frac{6}{5} < \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} &< x < \frac{9}{5} \end{aligned}$$

จะได้ว่ารัศมีแห่งการลู่เข้าคือ $\frac{3}{5}$ ตรวจสอบการลู่เข้าเมื่อ

สำหรับ $x = \frac{3}{5} = \frac{9}{5}$ จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (6-5x)^{2n+2}}{n \cdot 9^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

เป็นอนุกรมลู่เข้า (อนุกรมสลับ)

สรุปได้ว่า รัศมีแห่งการลู่เข้าคือ $\frac{3}{5}$ ช่วงแห่งการลู่เข้าคือ $[\frac{3}{5}, \frac{9}{5}]$ #

ข้อ 20

1. ให้ $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ จงประมาณค่าของ $\frac{1}{\sqrt[3]{1.1}}$ โดยใช้พหุนามเทย์เลอร์ 3 ของ f รอบจุด $x = 1$

พร้อมทั้งหาขอบเขตความผิดพลาด

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}f(x) &= x^{-\frac{1}{3}} & f(1) &= 1 \\f'(x) &= -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} & f'(1) &= -\frac{1}{3} \\f''(x) &= \frac{4}{9}x^{-\frac{7}{3}} & f''(1) &= \frac{4}{9} \\f'''(x) &= -\frac{28}{27}x^{-\frac{10}{3}} & f'''(1) &= -\frac{28}{27} \\f^{(4)}(x) &= \frac{280}{81}x^{-\frac{13}{3}}\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}T_3(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 \\&= 1 - \frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{9}(x-1)^2 - \frac{14}{81}(x-1)^3\end{aligned}$$

ประมาณค่า $\frac{1}{\sqrt[3]{1.1}}$ โดยแทน $x = 1.1$ ใน $T_3(x)$ จะได้

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[3]{1.1}} &= f(1.1) \\&\approx T_3(1.1) = 1 - \frac{1}{3}(0.1) + \frac{2}{9}(0.1)^2 - \frac{14}{81}(0.1)^3 \\&= 1 - \frac{0.1}{3} + \frac{0.02}{9} - \frac{0.014}{81} = \frac{78.466}{81} = 0.96872\end{aligned}$$

ให้ $1 < c < 1.1$ และ

$$|R_4(1.1)| = \left| \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(0.1)^4 \right| = \left| \frac{280c^{-\frac{13}{3}}}{81 \cdot 4!}(0.1)^4 \right| = \frac{280}{81 \cdot 4!}(0.1)^4 \cdot c^{-\frac{13}{3}}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}\frac{1}{1.1} &< c^{-1} < 1 \\ \therefore c^{-\frac{13}{3}} &< 1\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$|R_4(1.1)| < \frac{280}{81 \cdot 4!}(0.1)^4 = 0.0000144$$

2. ให้ $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ จงประมาณค่าของ $\frac{1}{\sqrt[3]{0.9}}$ โดยใช้พหุนามเทย์เลอร์ 3 ของ f รอบจุด $x = 1$

พร้อมทั้งหาขอบเขตความผิดพลาด

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{-\frac{1}{3}} & f(1) &= 1 \\ f'(x) &= -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} & f'(1) &= -\frac{1}{3} \\ f''(x) &= \frac{4}{9}x^{-\frac{7}{3}} & f''(1) &= \frac{4}{9} \\ f'''(x) &= -\frac{28}{27}x^{-\frac{10}{3}} & f'''(1) &= -\frac{28}{27} \\ f^{(4)}(x) &= \frac{280}{81}x^{-\frac{13}{3}} \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} T_3(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 \\ &= 1 - \frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{9}(x-1)^2 - \frac{14}{81}(x-1)^3 \end{aligned}$$

ประมาณค่า $\frac{1}{\sqrt[3]{0.9}}$ โดยแทน $x = 0.9$ ใน $T_3(x)$ จะได้

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[3]{0.9}} &= f(0.9) \\ &\approx T_3(0.9) = 1 - \frac{1}{3}(-0.1) + \frac{2}{9}(-0.1)^2 - \frac{14}{81}(-0.1)^3 \\ &= 1 + \frac{0.1}{3} + \frac{0.02}{9} + \frac{0.014}{81} = \frac{93.894}{81} = 1.035728 \end{aligned}$$

ให้ $0.9 < c < 1$ และ

$$|R_4(1.1)| = \left| \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(-0.1)^4 \right| = \left| \frac{280c^{-\frac{13}{3}}}{81 \cdot 4!}(0.1)^4 \right| = \frac{280}{81 \cdot 4!}(0.1)^4 \cdot c^{-\frac{13}{3}}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} 1 &< c^{-1} < \frac{1}{0.9} \\ \therefore c^{-\frac{13}{3}} &< \frac{1}{0.9^{\frac{13}{3}}} \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$|R_4(0.9)| < \frac{280}{81 \cdot 4!}(0.1)^4 \cdot \frac{1}{0.9^{\frac{13}{3}}} = 0.0000227$$

ข้อ 21

จงให้ตารางเทย์เลอร์

$$21.1 \text{ จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรม } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{2^n(n-1)!}$$

วิธีทำ พิจารณา

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx} e^x = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} \quad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$e^{\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^{n-1}}{n!} \quad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$e^{\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{2^{n-1} \cdot (n-1)!} \quad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{x^4}{2} \cdot e^{\frac{x^2}{2}} = \frac{x^4}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{2^{n-1} \cdot (n-1)!} \quad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{2^n(n-1)!} \quad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$21.1 \text{ จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรม } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{3^n(n-1)!}$$

วิธีทำ พิจารณา

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx} e^x = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} \quad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$e^{\frac{x^2}{3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x^2}{3}\right)^{n-1}}{n!} \quad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$e^{\frac{x^2}{3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{3^{n-1} \cdot (n-1)!} \quad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{x^4}{3} \cdot e^{\frac{x^2}{3}} = \frac{x^4}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{3^{n-1} \cdot (n-1)!} \quad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{3^n(n-1)!} \quad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R}$$

21.2 จงหาอนุกรมกำลังซึ่งมีฟังก์ชันผลบวกต่อไปนี้ $f(x) = x \left(\frac{x}{x+1} \right)^2$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n && \text{เมื่อ } |-x| < 1 \\ \frac{d}{dx} \frac{1}{1+x} &= \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n && \text{เมื่อ } |x| < 1 \\ -\frac{1}{(1+x)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1} && \text{เมื่อ } |x| < 1 \\ -\frac{1}{(1+x)^2} \cdot (-x^3) &= (-x^3) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1} && \text{เมื่อ } |x| < 1 \\ x \left(\frac{x}{x+1} \right)^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^{n+2} && \text{เมื่อ } |x| < 1 \end{aligned}$$

21.2 จงหาอนุกรมกำลังซึ่งมีฟังก์ชันผลบวกต่อไปนี้ $f(x) = x \left(\frac{x}{x-1} \right)^2$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-1} &= -\frac{1}{1-x} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n && \text{เมื่อ } |x| < 1 \\ \frac{d}{dx} \frac{1}{x-1} &= \frac{d}{dx} -\sum_{n=0}^{\infty} x^n && \text{เมื่อ } |x| < 1 \\ -\frac{1}{(x-1)^2} &= -\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} && \text{เมื่อ } |x| < 1 \\ \frac{1}{(x-1)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} && \text{เมื่อ } |x| < 1 \\ \frac{1}{(x-1)^2} \cdot x^3 &= x^3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} && \text{เมื่อ } |x| < 1 \\ x \left(\frac{x}{x-1} \right)^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n+2} && \text{เมื่อ } |x| < 1 \end{aligned}$$

ข้อ 22

22.1 ให้ $\vec{a}$, $\vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ ถ้า $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ โดยที่ $\|\vec{a}\| = 1$, $\|\vec{b}\| = 2$ และ $\|\vec{c}\| = 3$ จงหาค่าของ $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \cdot \vec{0} \\ \|\vec{a}\|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} &= 0 \\ 1 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} &= 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = -1 \\ \vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) &= \vec{b} \cdot \vec{0} \\ \vec{b} \cdot \vec{a} + \|\vec{b}\|^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} &= 0 \\ \vec{b} \cdot \vec{a} + 4 + \vec{b} \cdot \vec{c} &= 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{c} = -4 \\ \vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) &= \vec{c} \cdot \vec{0} \\ \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b} + \|\vec{c}\|^2 &= 0 \\ \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b} + 9 &= 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b} = -9\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}) + (\vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{c}) + (\vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b}) &= -1 - 4 - 9 = -14 \\ 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}) &= -14 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} &= -7 \quad \# \end{aligned}$$

22.1 ให้ $\vec{a}$, $\vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ ถ้า $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ โดยที่ $\|\vec{a}\| = 1$, $\|\vec{b}\| = 3$ และ $\|\vec{c}\| = 4$ จงหาค่าของ $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \cdot \vec{0} \\ \|\vec{a}\|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} &= 0 \\ 1 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} &= 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = -1 \\ \vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) &= \vec{b} \cdot \vec{0} \\ \vec{b} \cdot \vec{a} + \|\vec{b}\|^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} &= 0 \\ \vec{b} \cdot \vec{a} + 9 + \vec{b} \cdot \vec{c} &= 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{c} = -9 \\ \vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) &= \vec{c} \cdot \vec{0} \\ \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b} + \|\vec{c}\|^2 &= 0 \\ \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b} + 16 &= 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b} = -16\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}) + (\vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{c}) + (\vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b}) &= -1 - 9 - 16 = -26 \\ 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}) &= -26 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} &= -13 \quad \# \end{aligned}$$

22.1 ให้ $\vec{a}$, $\vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ ถ้า $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ โดยที่ $\|\vec{a}\| = 2$, $\|\vec{b}\| = 3$ และ $\|\vec{c}\| = 5$ จงหาค่าของ $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \cdot \vec{0} \\ \|\vec{a}\|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} &= 0 \\ 4 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} &= 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = -4 \\ \vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) &= \vec{b} \cdot \vec{0} \\ \vec{b} \cdot \vec{a} + \|\vec{b}\|^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} &= 0 \\ \vec{b} \cdot \vec{a} + 9 + \vec{b} \cdot \vec{c} &= 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{c} = -9 \\ \vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) &= \vec{c} \cdot \vec{0} \\ \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b} + \|\vec{c}\|^2 &= 0 \\ \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b} + 25 &= 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b} = -25\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}) + (\vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{c}) + (\vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b}) &= -4 - 9 - 25 = -38 \\ 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}) &= -38 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} &= -19 \quad \# \end{aligned}$$

22.1 ให้ $\vec{a}$, $\vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ ถ้า $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ โดยที่ $\|\vec{a}\| = 2$, $\|\vec{b}\| = 1$ และ $\|\vec{c}\| = 7$ จงหาค่าของ $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \cdot \vec{0} \\ \|\vec{a}\|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} &= 0 \\ 4 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} &= 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = -4 \\ \vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) &= \vec{b} \cdot \vec{0} \\ \vec{b} \cdot \vec{a} + \|\vec{b}\|^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} &= 0 \\ \vec{b} \cdot \vec{a} + 1 + \vec{b} \cdot \vec{c} &= 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{c} = -1 \\ \vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) &= \vec{c} \cdot \vec{0} \\ \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b} + \|\vec{c}\|^2 &= 0 \\ \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b} + 49 &= 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b} = -49\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}) + (\vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{c}) + (\vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b}) &= -4 - 1 - 49 = -54 \\ 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}) &= -54 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} &= -27 \quad \# \end{aligned}$$

21.2 ให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1, 2, 1)$ และตั้งฉากกับระนาบ M ที่มีสมการเป็น $2x + y - 2z = 20$
จงหาจุดตัดของเส้นตรง L กับระนาบ M

วิธีทำ เนื่องจาก L ตั้งฉากกับระนาบจะได้ว่า $\vec{A}$ ขนาน $\vec{N}$ เลือก $\vec{A} = \vec{N} = \langle 2, 1, -2 \rangle$ ดังนั้นสมการเส้นตรง L คือ

$$\begin{cases} x &= 1 + 2t \\ y &= 2 + t \\ z &= 1 - 2t \end{cases}$$

พิจารณา

$$2(1 + 2t) + (2 + t) - 2(1 - 2t) = 20$$

$$2 + 4t + 2 + t - 2 + 4t = 20$$

$$9t = 18 \quad \therefore \quad t = 2$$

ดังนั้นจุดตัดของเส้นตรง L กับระนาบ M คือ $(1 + 2 \cdot 2, 2 + 2, 1 - 2 \cdot 2) = (5, 4, -3) \quad \#$

21.2 ให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1, -2, 1)$ และตั้งฉากกับระนาบ M ที่มีสมการเป็น $2x + y - 2z = -7$
จงหาจุดตัดของเส้นตรง L กับระนาบ M

วิธีทำ เนื่องจาก L ตั้งฉากกับระนาบจะได้ว่า $\vec{A}$ ขนาน $\vec{N}$ เลือก $\vec{A} = \vec{N} = \langle 2, 1, -2 \rangle$ ดังนั้นสมการเส้นตรง L คือ

$$\begin{cases} x &= 1 + 2t \\ y &= -2 + t \\ z &= 1 - 2t \end{cases}$$

พิจารณา

$$2(1 + 2t) + (-2 + t) - 2(1 - 2t) = -7$$

$$2 + 4t - 2 + t - 2 + 4t = -7$$

$$9t = -9 \quad \therefore \quad t = -1$$

ดังนั้นจุดตัดของเส้นตรง L กับระนาบ M คือ $(1 + 2(-1), -2 - 1, 1 - 2(-1)) = (-1, -3, 3) \quad \#$

21.2 ให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1, 2, -1)$ และตั้งฉากกับระนาบ M ที่มีสมการเป็น $2x + y - 2z = -12$
จงหาจุดตัดของเส้นตรง L กับระนาบ M

วิธีทำ เนื่องจาก L ตั้งฉากกับระนาบจะได้ว่า $\vec{A}$ ขนาน $\vec{N}$ เลือก $\vec{A} = \vec{N} = \langle 2, 1, -2 \rangle$ ดังนั้นสมการเส้นตรง L คือ

$$\begin{cases} x &= 1 + 2t \\ y &= 2 + t \\ z &= -1 - 2t \end{cases}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} 2(1 + 2t) + (2 + t) - 2(-1 - 2t) &= -12 \\ 2 + 4t + 2 + t + 2 + 4t &= -12 \\ 9t &= -18 \quad \therefore \quad t = -2 \end{aligned}$$

ดังนั้นจุดตัดของเส้นตรง L กับระนาบ M คือ $(1 + 2(-2), 2 - 2, -1 - 2(-2)) = (-3, 0, 5) \quad \#$

21.2 ให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1, 2, 1)$ และตั้งฉากกับระนาบ M ที่มีสมการเป็น $2x + y - 2z = 25$
จงหาจุดตัดของเส้นตรง L กับระนาบ M

วิธีทำ เนื่องจาก L ตั้งฉากกับระนาบจะได้ว่า $\vec{A}$ ขนาน $\vec{N}$ เลือก $\vec{A} = \vec{N} = \langle 2, 1, -2 \rangle$ ดังนั้นสมการเส้นตรง L คือ

$$\begin{cases} x &= -1 + 2t \\ y &= 2 + t \\ z &= 1 - 2t \end{cases}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} 2(-1 + 2t) + (2 + t) - 2(1 - 2t) &= 25 \\ -2 + 4t + 2 + t - 2 + 4t &= 25 \\ 9t &= 27 \quad \therefore \quad t = 3 \end{aligned}$$

ดังนั้นจุดตัดของเส้นตรง L กับระนาบ M คือ $(-1 + 2 \cdot 3, 2 + 3, 1 - 2 \cdot 3) = (7, 5, -5) \quad \#$

ข้อ 23

กำหนดให้ $L_1 : x = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$ และ $L_2 : \frac{4-x}{2} = \frac{y-1}{4} = z-5$ เป็นเส้นตรงในสามมิติ

23.1 จงหาจุดตัดของเส้นตรง L_1 และ L_2

23.2 จงหาสมการระนาบที่ผ่านเส้นตรง L_1 และ L_2

วิธีทำ จากสมการของ L_1 จะได้ว่า $y-1 = 2x$ และสมการของ L_2 จะได้ว่า $y-1 = 4\left(\frac{4-x}{2}\right) = 2(4-x) = 8-2x$ นั่นคือ

$$2x = 8 - 2x$$

$$4x = 8 \quad \therefore \quad x = 2$$

$$y - 1 = 2(2) = 4 \quad \therefore \quad y = 5$$

$$z = 3(2) \quad \therefore \quad z = 6$$

ดังนั้นจุดตัดของเส้นตรง L_1 และ L_2 คือ $(2, 5, 6)$ #

จะเห็นว่า $\vec{A}_1 = \langle 1, 2, 3 \rangle$ และ $\vec{A}_2 = \langle -2, 4, 1 \rangle$ เนื่องจากระนาบที่ผ่านเส้นตรง L_1 และ L_2 จะได้ว่า $\vec{N}$ ตั้งฉากกับ $\vec{A}_1$ และ $\vec{A}_2$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned}\vec{N} = \vec{A}_1 \times \vec{A}_2 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \langle -10, -7, 8 \rangle\end{aligned}$$

สมการของระนาบที่ผ่านจุด $(2, 5, 6)$ และตั้งฉากกับ $\vec{N} = \langle -10, -7, 8 \rangle$ คือ

$$\begin{aligned}-10(x-2) - 7(y-5) + 8(z-6) &= 0 \\ -10x - 7y + 8z &= -7 \quad \# \end{aligned}$$

กำหนดให้ $L_1 : x = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{2}$ และ $L_2 : \frac{4-x}{2} = \frac{y-1}{5} = z-3$ เป็นเส้นตรงในสามมิติ

23.1 จงหาจุดตัดของเส้นตรง L_1 และ L_2

23.2 จงหาสมการระนาบที่ผ่านเส้นตรง L_1 และ L_2

วิธีทำ จากสมการของ L_1 จะได้ว่า $z = 2x$ และสมการของ L_2 จะได้ว่า $z = \frac{4-x}{2} + 3$ นั่นคือ

$$2x = \frac{4-x}{2} + 3$$

$$4x - 6 = 4 - x$$

$$5x = 10 \quad \therefore \quad x = 2$$

$$z = 2(2) = 4 \quad \therefore \quad z = 4$$

$$y - 2 = 2(2) \quad \therefore \quad y = 6$$

ดังนั้นจุดตัดของเส้นตรง L_1 และ L_2 คือ $(2, 6, 4)$ #

จะเห็นว่า $\vec{A}_1 = \langle 1, 2, 2 \rangle$ และ $\vec{A}_2 = \langle -2, 5, 1 \rangle$ เนื่องจากระนาบที่ผ่านเส้นตรง L_1 และ L_2 จะได้ว่า $\vec{N}$ ตั้งฉากกับ $\vec{A}_1$ และ $\vec{A}_2$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned}\vec{N} = \vec{A}_1 \times \vec{A}_2 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= \langle -8, -5, 9 \rangle\end{aligned}$$

สมการของระนาบที่ผ่านจุด $(2, 6, 4)$ และตั้งฉากกับ $\vec{N} = \langle -8, -5, 9 \rangle$ คือ

$$\begin{aligned}-8(x-2) - 5(y-6) + 9(z-4) &= 0 \\ -8x - 5y + 9z &= -10 \quad \# \end{aligned}$$

กำหนดให้ $L_1 : x = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{3}$ และ $L_2 : \frac{4-x}{2} = \frac{y-4}{5} = z-5$ เป็นเส้นตรงในสามมิติ

23.1 จงหาจุดตัดของเส้นตรง L_1 และ L_2

23.2 จงหาสมการระนาบที่ผ่านเส้นตรง L_1 และ L_2

วิธีทำ จากสมการของ L_1 จะได้ว่า $z = 3x$ และสมการของ L_2 จะได้ว่า $z = \frac{4-x}{2} + 5$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} 3x &= \frac{4-x}{2} + 5 \\ 6x - 10 &= 4 - x \\ 7x &= 14 \quad \therefore \quad x = 2 \\ z &= 3(2) = 6 \quad \therefore \quad z = 6 \\ y - 1 &= 4(2) \quad \therefore \quad y = 9 \end{aligned}$$

ดังนั้นจุดตัดของเส้นตรง L_1 และ L_2 คือ $(2, 9, 6)$ #

จะเห็นว่า $\vec{A}_1 = \langle 1, 4, 3 \rangle$ และ $\vec{A}_2 = \langle -2, 5, 1 \rangle$ เนื่องจากระนาบที่ผ่านเส้นตรง L_1 และ L_2 จะได้ว่า $\vec{N}$ ตั้งฉากกับ $\vec{A}_1$ และ $\vec{A}_2$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned} \vec{N} = \vec{A}_1 \times \vec{A}_2 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= \langle -11, -7, 13 \rangle \end{aligned}$$

สมการของระนาบที่ผ่านจุด $(2, 9, 6)$ และตั้งฉากกับ $\vec{N} = \langle -11, -7, 13 \rangle$ คือ

$$\begin{aligned} -11(x-2) - 7(y-9) + 13(z-6) &= 0 \\ -11x - 7y + 13z &= -7 \quad \# \end{aligned}$$

กำหนดให้ $L_1 : x = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{4}$ และ $L_2 : \frac{4-x}{2} = \frac{y-1}{3} = z-5$ เป็นเส้นตรงในสามมิติ

23.1 จงหาจุดตัดของเส้นตรง L_1 และ L_2

23.1 จงหาสมการระนาบที่ผ่านเส้นตรง L_1 และ L_2

วิธีทำ จากสมการของ L_1 จะได้ว่า $z = 4x - 2$ และสมการของ L_2 จะได้ว่า $z = \frac{4-x}{2} + 5$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} 4x - 2 &= \frac{4-x}{2} + 5 \\ 8x - 14 &= 4 - x \\ 9x &= 18 \quad \therefore \quad x = 2 \\ z &= 4(2) - 2 = 6 \quad \therefore \quad z = 6 \\ y &= 2(2) \quad \therefore \quad y = 4 \end{aligned}$$

ดังนั้นจุดตัดของเส้นตรง L_1 และ L_2 คือ $(2, 4, 6)$ #

จะเห็นว่า $\vec{A}_1 = \langle 1, 2, 4 \rangle$ และ $\vec{A}_2 = \langle -2, 3, 1 \rangle$ เนื่องจากระนาบที่ผ่านเส้นตรง L_1 และ L_2 จะได้ว่า $\vec{N}$ ตั้งฉากกับ $\vec{A}_1$ และ $\vec{A}_2$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned} \vec{N} = \vec{A}_1 \times \vec{A}_2 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \langle -10, -9, 7 \rangle \end{aligned}$$

สมการของระนาบที่ผ่านจุด $(2, 4, 6)$ และตั้งฉากกับ $\vec{N} = \langle -10, -9, 7 \rangle$ คือ

$$\begin{aligned} -10(x-2) - 9(y-4) + 7(z-6) &= 0 \\ -10x - 9y + 7z &= -14 \quad \# \end{aligned}$$

ข้อ 24

1. จงหาเวกเตอร์เส้นสัมผัสหน่วย $\vec{T}$ เวกเตอร์แนวฉากหน่วย $\vec{N}$ และเวกเตอร์แนวฉากคู่ $\vec{B}$ ของเส้นโค้ง

$$\vec{r}(t) = \langle 2 \sin^2 t, \sin 2t, t \rangle \quad \text{ที่จุด } (2, 0, \frac{\pi}{2})$$

วิธีทำ จะเห็นว่า $\vec{r}(\frac{\pi}{2}) = \langle 2, 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ นั่นคือ $t = \frac{\pi}{2}$

เวกเตอร์สัมผัสหน่วย $\vec{T}$ เมื่อ $t = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}\vec{r}'(t) &= \langle 4 \sin t \cos t, 2 \cos 2t, 1 \rangle \\ \vec{r}'(t) &= \langle 2 \sin 2t, 2 \cos 2t, 1 \rangle \\ \|\vec{r}'(t)\| &= \sqrt{4 \sin^2 2t + 4 \cos^2 2t + 1} = \sqrt{5} \\ \vec{T}(t) &= \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \langle 2 \sin 2t, 2 \cos 2t, 1 \rangle \\ \vec{T}(\frac{\pi}{2}) &= \left\langle 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right\rangle \quad \# \end{aligned}$$

เวกเตอร์แนวฉากหน่วย $\vec{N}$ เมื่อ $t = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}\vec{T}'(t) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \langle 4 \cos 2t, -4 \sin 2t, 0 \rangle \\ \|\vec{T}'(t)\| &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{16 \cos^2 2t + 16 \sin^2 2t + 0} = \frac{4}{\sqrt{5}} \\ \vec{N}(t) &= \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{4}{\sqrt{5}}} \langle 4 \cos 2t, -4 \sin 2t, 0 \rangle = \langle \cos 2t, -\sin 2t, 0 \rangle \\ \vec{N}(\frac{\pi}{2}) &= \langle -1, 0, 0 \rangle \quad \# \end{aligned}$$

เวกเตอร์แนวฉากคู่ $\vec{B}$ เมื่อ $t = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}\vec{B}(\frac{\pi}{2}) &= \vec{T}(\frac{\pi}{2}) \times \vec{N}(\frac{\pi}{2}) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left\langle 0, -\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right\rangle \quad \# \end{aligned}$$

2. จงหาเวกเตอร์เส้นสัมผัสหน่วย $\vec{T}$ เวกเตอร์แนวฉากหน่วย $\vec{N}$ และเวกเตอร์แนวฉากคู่ $\vec{B}$ ของเส้นโค้ง

$$\vec{r}(t) = \langle 2 \sin^2 t, \sin 2t, t \rangle \quad \text{ที่จุด } (2, 0, -\frac{\pi}{2})$$

วิธีทำ จะเห็นว่า $\vec{r}(-\frac{\pi}{2}) = \langle 2, 0, -\frac{\pi}{2} \rangle$ นั่นคือ $t = -\frac{\pi}{2}$

เวกเตอร์สัมผัสหน่วย $\vec{T}$ เมื่อ $t = -\frac{\pi}{2}$

$$\vec{r}'(t) = \langle 4 \sin t \cos t, 2 \cos 2t, 1 \rangle$$

$$\vec{r}'(t) = \langle 2 \sin 2t, 2 \cos 2t, 1 \rangle$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{4 \sin^2 2t + 4 \cos^2 2t + 1} = \sqrt{5}$$

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \langle 2 \sin 2t, 2 \cos 2t, 1 \rangle$$

$$\vec{T}(-\frac{\pi}{2}) = \left\langle 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right\rangle \quad \#$$

เวกเตอร์แนวฉากหน่วย $\vec{N}$ เมื่อ $t = -\frac{\pi}{2}$

$$\vec{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \langle 4 \cos 2t, -4 \sin 2t, 0 \rangle$$

$$\|\vec{T}'(t)\| = \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{16 \cos^2 2t + 16 \sin^2 2t + 0} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{4}{\sqrt{5}}} \langle 4 \cos 2t, -4 \sin 2t, 0 \rangle = \langle \cos 2t, -\sin 2t, 0 \rangle$$

$$\vec{N}(-\frac{\pi}{2}) = \langle -1, 0, 0 \rangle \quad \#$$

เวกเตอร์แนวฉากคู่ $\vec{B}$ เมื่อ $t = -\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \vec{B}(-\frac{\pi}{2}) &= \vec{T}(-\frac{\pi}{2}) \times \vec{N}(-\frac{\pi}{2}) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left\langle 0, -\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right\rangle \quad \# \end{aligned}$$

3. จงหาเวกเตอร์เส้นสัมผัสหน่วย $\vec{T}$ เวกเตอร์แนวฉากหน่วย $\vec{N}$ และเวกเตอร์แนวฉากคู่ $\vec{B}$ ของเส้นโค้ง

$$\vec{r}(t) = \langle 2 \cos^2 t, \sin 2t, t \rangle \quad \text{ที่จุด } (0, 0, \frac{\pi}{2})$$

วิธีทำ จะเห็นว่า $\vec{r}(\frac{\pi}{2}) = \langle 0, 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ นั่นคือ $t = \frac{\pi}{2}$

เวกเตอร์สัมผัสหน่วย $\vec{T}$ เมื่อ $t = \frac{\pi}{2}$

$$\vec{r}'(t) = \langle -4 \cos t \sin t, 2 \cos 2t, 1 \rangle$$

$$\vec{r}'(t) = \langle -2 \sin 2t, 2 \cos 2t, 1 \rangle$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{4 \sin^2 2t + 4 \cos^2 2t + 1} = \sqrt{5}$$

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \langle -2 \sin 2t, 2 \cos 2t, 1 \rangle$$

$$\vec{T}(\frac{\pi}{2}) = \left\langle 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right\rangle \quad \#$$

เวกเตอร์แนวฉากหน่วย $\vec{N}$ เมื่อ $t = \frac{\pi}{2}$

$$\vec{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \langle -4 \cos 2t, -4 \sin 2t, 0 \rangle$$

$$\|\vec{T}'(t)\| = \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{16 \cos^2 2t + 16 \sin^2 2t + 0} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{4}{\sqrt{5}}} \langle -4 \cos 2t, -4 \sin 2t, 0 \rangle = \langle -\cos 2t, -\sin 2t, 0 \rangle$$

$$\vec{N}(\frac{\pi}{2}) = \langle 1, 0, 0 \rangle \quad \#$$

เวกเตอร์แนวฉากคู่ $\vec{B}$ เมื่อ $t = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \vec{B}(\frac{\pi}{2}) &= \vec{T}(\frac{\pi}{2}) \times \vec{N}(\frac{\pi}{2}) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left\langle 0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right\rangle \quad \# \end{aligned}$$

4. จงหาเวกเตอร์เส้นสัมผัสหน่วย $\vec{T}$ เวกเตอร์แนวฉากหน่วย $\vec{N}$ และเวกเตอร์แนวฉากคู่ $\vec{B}$ ของเส้นโค้ง

$$\vec{r}(t) = \langle 2 \cos^2 t, \sin 2t, t \rangle \quad \text{ที่จุด } (0, 0, -\frac{\pi}{2})$$

วิธีทำ จะเห็นว่า $\vec{r}(-\frac{\pi}{2}) = \langle 0, 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ นั่นคือ $t = -\frac{\pi}{2}$

เวกเตอร์สัมผัสหน่วย $\vec{T}$ เมื่อ $t = -\frac{\pi}{2}$

$$\vec{r}'(t) = \langle -4 \cos t \sin t, 2 \cos 2t, 1 \rangle$$

$$\vec{r}'(t) = \langle -2 \sin 2t, 2 \cos 2t, 1 \rangle$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{4 \sin^2 2t + 4 \cos^2 2t + 1} = \sqrt{5}$$

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \langle -2 \sin 2t, 2 \cos 2t, 0 \rangle$$

$$\vec{T}(-\frac{\pi}{2}) = \left\langle 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right\rangle \quad \#$$

เวกเตอร์แนวฉากหน่วย $\vec{N}$ เมื่อ $t = -\frac{\pi}{2}$

$$\vec{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \langle -4 \cos 2t, -4 \sin 2t, 0 \rangle$$

$$\|\vec{T}'(t)\| = \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{16 \cos^2 2t + 16 \sin^2 2t + 0} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{4}{\sqrt{5}}} \langle -4 \cos 2t, -4 \sin 2t, 0 \rangle = \langle -\cos 2t, -\sin 2t, 0 \rangle$$

$$\vec{N}(-\frac{\pi}{2}) = \langle 1, 0, 0 \rangle \quad \#$$

เวกเตอร์แนวฉากคู่ $\vec{B}$ เมื่อ $t = -\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \vec{B}(-\frac{\pi}{2}) &= \vec{T}(-\frac{\pi}{2}) \times \vec{N}(-\frac{\pi}{2}) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left\langle 0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right\rangle \quad \# \end{aligned}$$