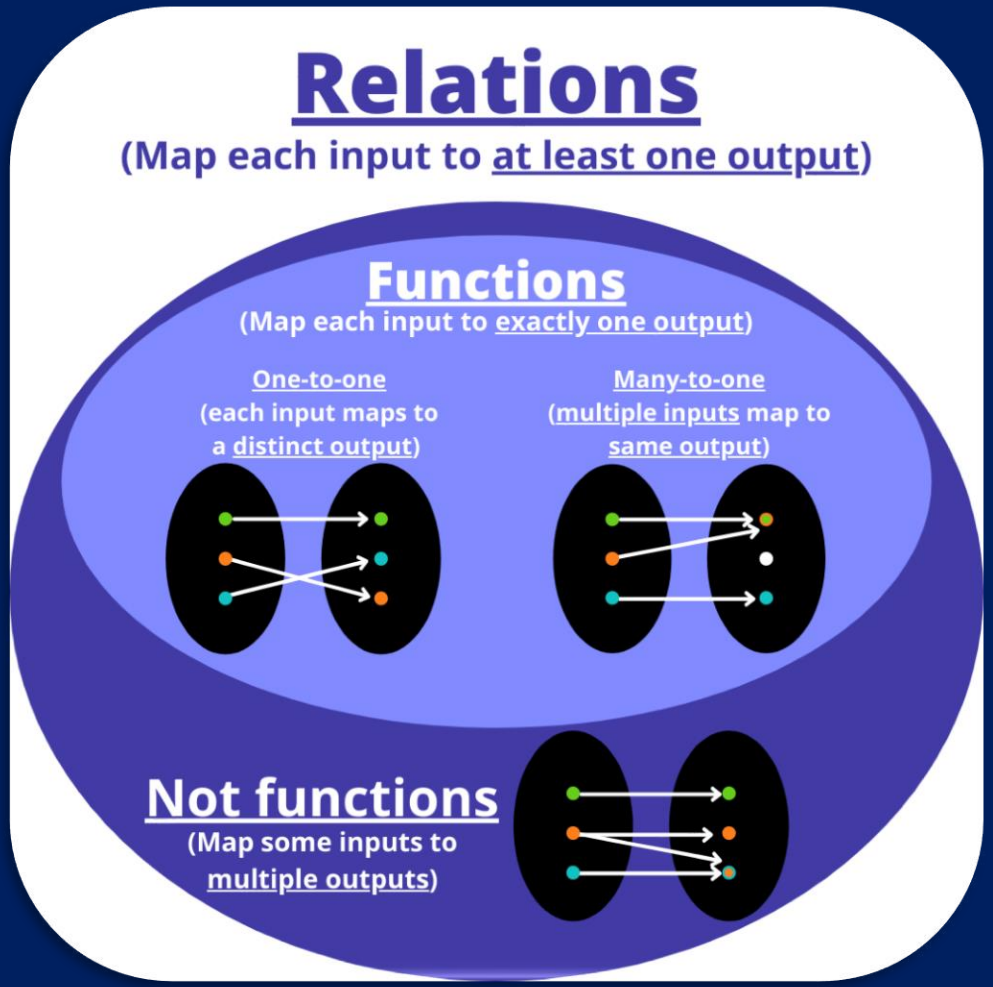
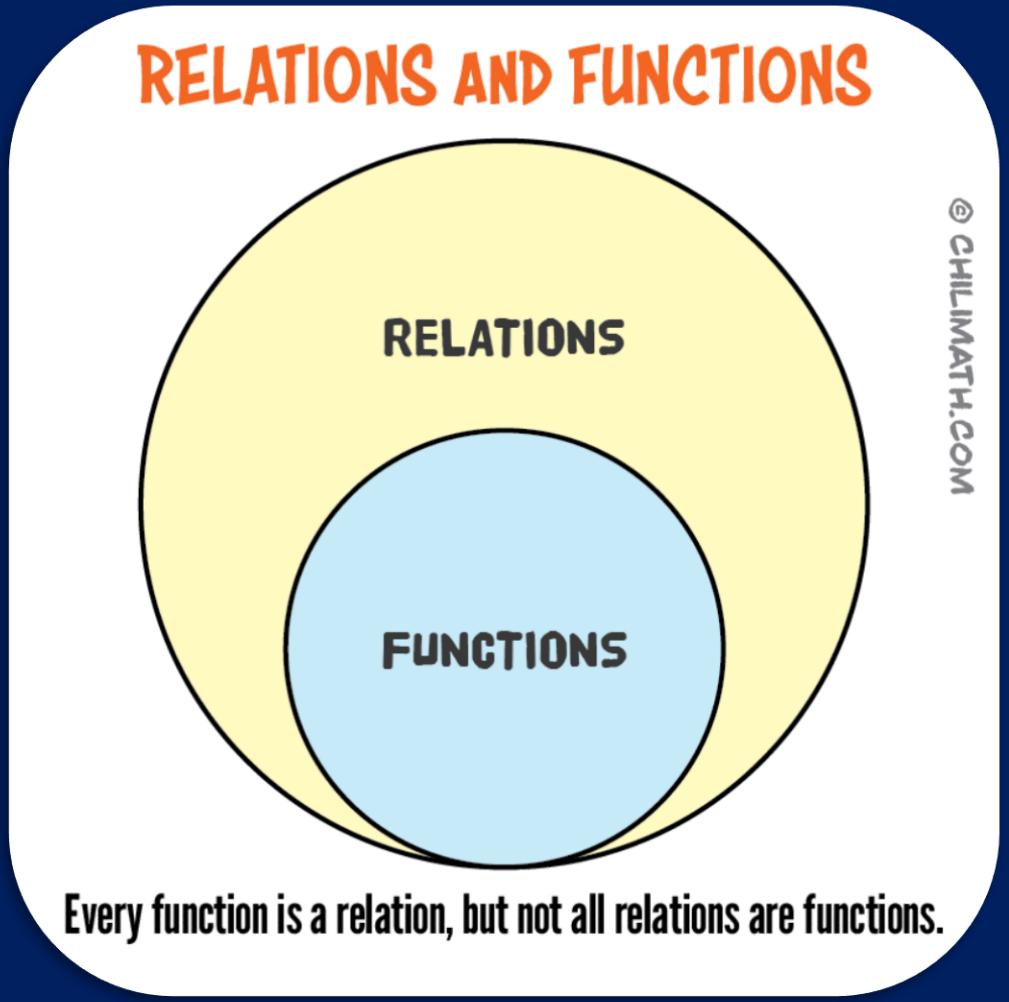
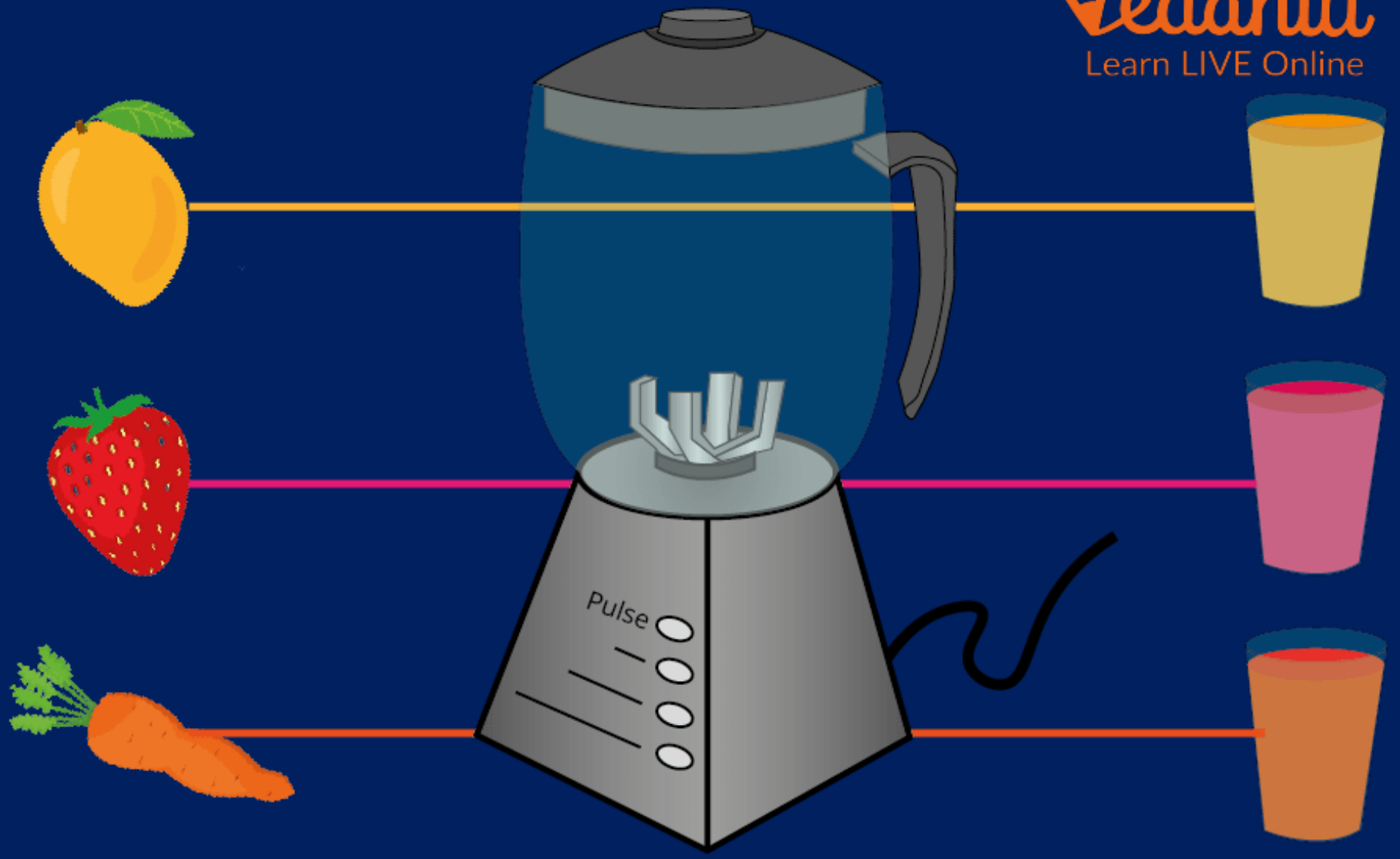
บทที่ 5 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน





Gottfried Leibniz (1646–1716) was a German polymath, a philosopher, mathematician, logician, and diplomat, credited with the independent invention of differential and integral calculus, and the development of the modern binary system.

FUNCTION: DEFINITION
input
function
output
Study.com


Vedantu
Learn LIVE Online
Pulse
Input
Process
Output

คู่อันดับและผลคูณคาร์ทีเซียน

ความสัมพันธ์และสมบัติความสัมพันธ์

โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

กราฟของความสัมพันธ์

คู่อันดับ (Order pair) และ ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product)

- **บทนิยาม 1** :

ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ ที่ $a \in A$ และ $b \in B$ นิยามคู่อันดับ (a, b) ว่าเป็นเซต {{a}, {a , b}} เรียก a ว่า**พิกัดที่หนึ่ง (first coordinate)** และ เรียก b ว่า**พิกัดที่สอง (second coordinate)** ของคู่อันดับ **(a, b)**

จากนิยาม ถ้า a, c ∈ A และ b, d ∈ B จะได้

(a, b) = (c, d) ก็ต่อเมื่อ a = c และ b = d

และ (a, b) = (b, a) ก็ต่อเมื่อ a = b

คู่อันดับ (Order pair) และ ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product)

- **บทนิยาม 2** :

ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ **ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian product)** ของ A และ B คือเซตของคู่อันดับ (x, y) ทั้งหมดซึ่ง $x \in A$ และ $y \in B$ และเขียนแทนด้วย $A \times B$

นั่นคือ $$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$$

หรือ $$(a, b) \in A \times B \leftrightarrow a \in A \wedge b \in B$$

*** จากนิยาม A และ B ต้องไม่เป็นเซตว่าง ถ้า $A = \emptyset$ หรือ $B = \emptyset$ แล้ว $A \times B = \emptyset$

- ตัวอย่าง : ให้ **A = {1, 2, 3}** และ **B = {1, 2, 3, 4}** จงหา

1. A x B = _____

2. B x A = _____

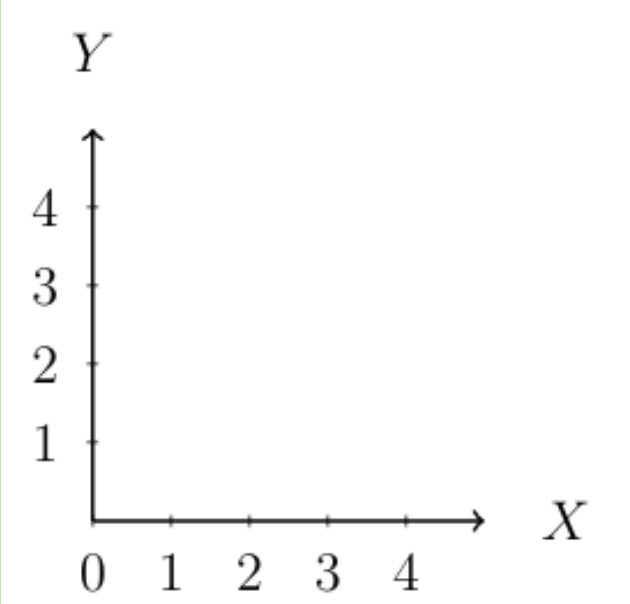
3. A x A = _____

4. B x B = _____

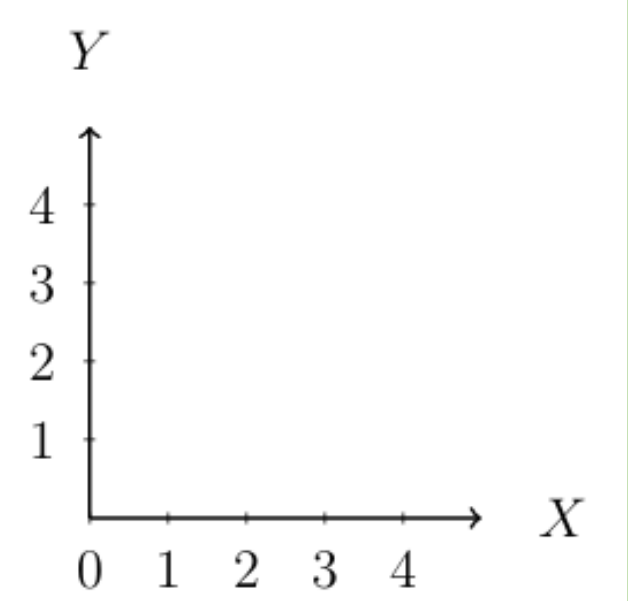
**** สรุป :

- สามารถนำคู่อันดับในแต่ละเซตมาสร้างกราฟได้ดังนี้

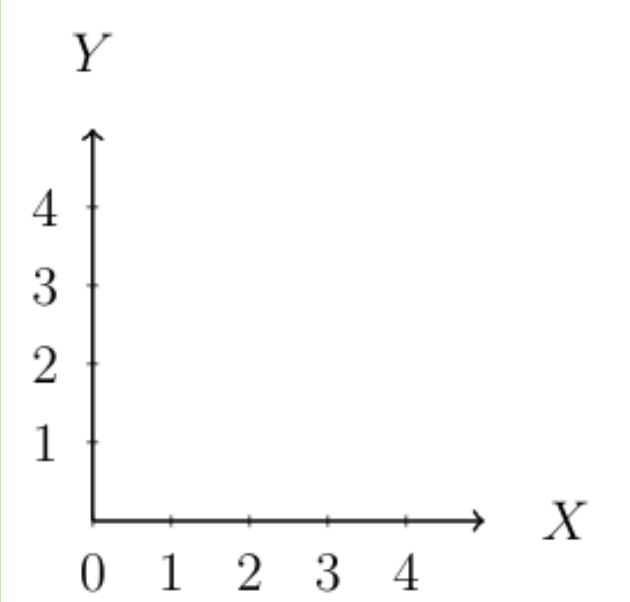
1. A x B



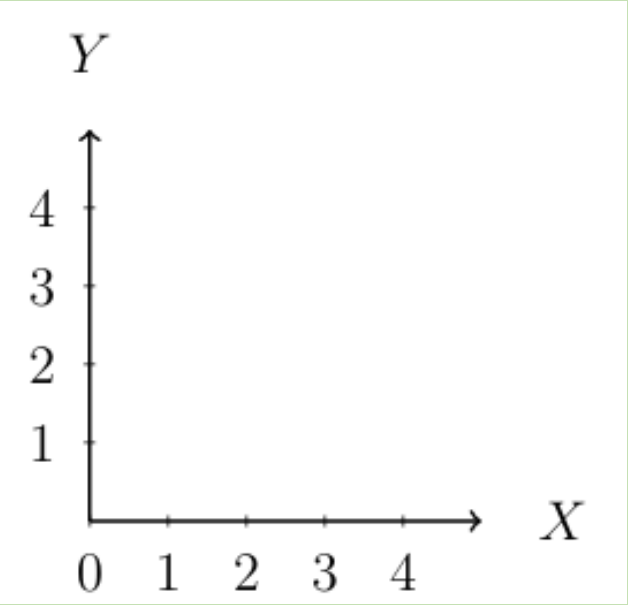
2. B x A



3. A x A



4. B x B



ทฤษฎีบทผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product)

ทฤษฎีบท : ให้ A B C และ D เป็นเซตใดๆ จะได้ว่า

1) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

2) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

3) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

4) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$

ความสัมพันธ์ (Relations)

- **บทนิยาม 3** :

ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ ความสัมพันธ์จาก A ไป B (relation from A to B) เป็นสับเซตของ A x B

ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B และ $(a, b) \in r$ เขียนแทนด้วย a r b อ่านว่า *a สัมพันธ์ (relate) r กับ b* และในกรณีที่ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป A จะเรียก r ว่า ความสัมพันธ์บน A

**** ในกรณีที่ $(a, b) \notin r$ จะกล่าวว่า $a \not r\ b$

กำหนด A = {2,3,4} และ B = {6,8,9,16} จงหาความสัมพันธ์ต่อไปนี้

1 r_1 แทนความสัมพันธ์ “น้อยกว่า”จากเซต A ไปเซต B

2 r_2 แทนความสัมพันธ์ “มากกว่า”จากเซต B ไปเซต A

3 r_3 แทนความสัมพันธ์ “เป็นสองเท่า” ใน A

4 r_4 แทนความสัมพันธ์ “x+y เป็นจำนวนเฉพาะ”จากเซต A ไปเซต B

5 r_5 แทนความสัมพันธ์ “หารลงตัว”จากเซต A ไปเซต B

6 r_6 แทนความสัมพันธ์ “เป็นรากที่สอง”จากเซต A ไปเซต B

โดเมน (domain) และ เรนจ์ (range) ของความสัมพันธ์

- **บทนิยาม 4** :

ให้ A และ B เป็นเซตใดๆ โดยที่ $r \subseteq A \times B$

- โดเมน (domain) ของ r เขียนแทนด้วย D_r กำหนดโดย

$$D_r = \{x \in A \mid \exists y \in B \text{ ที่ทำให้ } (x, y) \in r\}$$

- เรนจ์ (range) ของ r เขียนแทนด้วย R_r กำหนดโดย

$$R_r = \{y \in B \mid \exists x \in A \text{ ที่ทำให้ } (x, y) \in r\}$$

***ข้อสังเกตุ : 1. $D_r \subseteq A$ และ $R_r \subseteq B$

2. $r \subseteq D_r \times R_r$ แต่ $D_r \times R_r$ ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ r

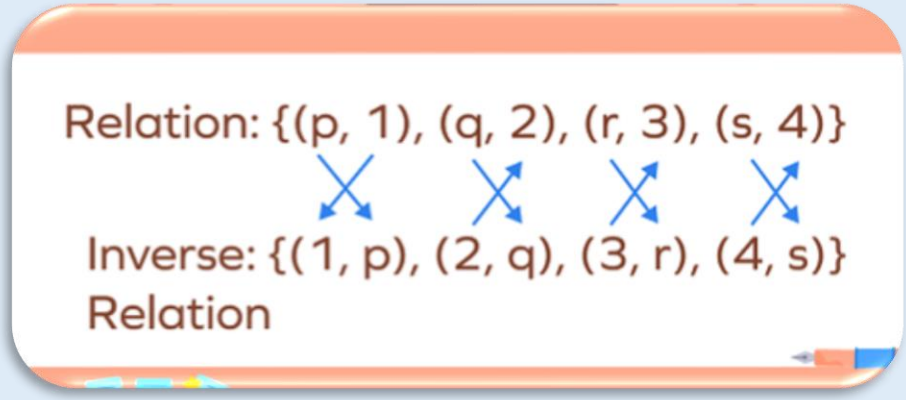
ความสัมพันธ์ผกผัน (Inverse relations)

- **บทนิยาม 5** : ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

ความสัมพันธ์ผกผัน (Inverse relations) ของ r เขียนแทนด้วย r^{-1} คือความสัมพันธ์จาก B ไป A เขียนแทนด้วย $x\ r^{-1} y$ ก็ต่อเมื่อ $y\ r\ x$

$$r^{-1} = \{(x, y) \in B \times A \mid (y, x) \in r\}$$

หรือ $$(x, y) \in r^{-1} \leftrightarrow (y, x) \in r$$

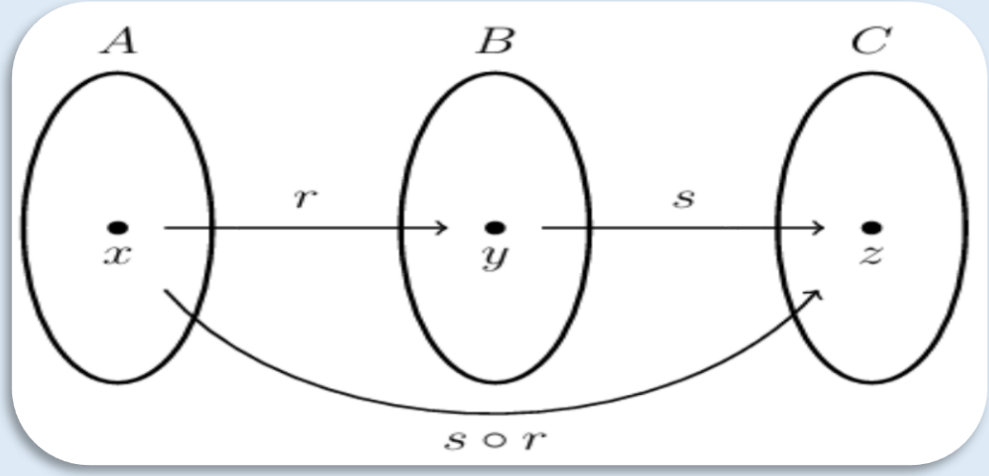


ความสัมพันธ์ประกอบ (composite relations)

- **บทนิยาม 6** : ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B และ s เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป C

"ความสัมพันธ์ประกอบ (composite relations)" ของ r กับ s คือความสัมพันธ์จาก A ไปยัง C เขียนแทนด้วย $s \circ r$ ซึ่งกำหนดดังนี้

$$s \circ r = \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y \in B, (x, y) \in r \wedge (y, z) \in s\}$$



สมบัติบางประการของความสัมพันธ์

ให้ A เป็นเซต และ r เป็นความสัมพันธ์บน A เราจะกล่าวว่า r มีสมบัติ

- **สะท้อน (reflexive)** ก็ต่อเมื่อ ทุก $x \in A$, $x\, r\, x$
- **สมมาตร (symmetric)** ก็ต่อเมื่อ ทุก $x, y \in A$ ถ้า $x\, r\, y$ แล้ว $y\, r\, x$
- **ถ่ายทอด (transitive)** ก็ต่อเมื่อ ทุก $x, y, z \in A$ ถ้า $x\, r\, y$ และ $y\, r\, z$ แล้ว $x\, r\, z$
- **ปฏิสมมาตร (antisymmetric)** ก็ต่อเมื่อ ทุก $x, y \in A$ ถ้า $x\, r\, y$ และ $y\, r\, x$ แล้ว $x = y$

ความสัมพันธ์สมมูล และความสัมพันธ์อันดับบางส่วน

- บทนิยาม 7 :

ความสัมพันธ์ r บนเซต A จะเรียกว่า ความสัมพันธ์สมมูล (equivalent relation) ก็ต่อเมื่อ r มีสมบัติ สะท้อน สมมาตร และถ่ายทอด

- บทนิยาม 8 :

ความสัมพันธ์ r บนเซต A จะเรียกว่า ความสัมพันธ์อันดับบางส่วน (partial ordered relation) ก็ต่อเมื่อ r มีสมบัติ สะท้อน ปฏิสมมาตร และถ่ายทอด

ฟังก์ชัน (Function หรือ Mapping)

- **บทนิยาม 9 :**

ความสัมพันธ์ $f \subseteq A \times B$ เป็น*ฟังก์ชัน (Function หรือ Mapping)* ก็ต่อเมื่อ *แต่ละ* (x_1, y_1) *และ* (x_2, y_2) *ใน* f *ถ้า* $x_1 = x_2$ *แล้ว* $y_1 = y_2$ *นั่นคือ*

$f \subseteq A \times B$ เป็นฟังก์ชัน $\leftrightarrow \forall (x_1, y_1) \in f \wedge \forall (x_2, y_2) \in f , x_1 = x_2 \rightarrow y_1 = y_2$

และ

$f \subseteq A \times B$ ไม่เป็นฟังก์ชัน $\leftrightarrow \exists (x_1, y_1) \in f \wedge \exists (x_2, y_2) \in f , x_1 = x_2 \wedge y_1 \neq y_2$

*** $\emptyset$ เป็นฟังก์ชัน เพราะ $\emptyset \subseteq A \times B$ และสอดคล้องกับสมบัติข้างต้น

ฟังก์ชัน (Function หรือ Mapping)

- **บทนิยาม 10 :**

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันใดๆ จะเรียก $\{x|(x, y) \in f\}$ ว่าโดเมนของ f เขียนแทนด้วย D_f และเรียก $\{y|(x, y) \in f\}$ ว่าเรนจ์ของ f เขียนแทนด้วย R_f

*** ถ้า $R_f \subset R$ จะเรียก f ว่า ฟังก์ชันค่าจริง (Real value function) และ ถ้า $R_f \subset R$ และ $D_f \subset R$ จะเรียก f ว่า ฟังก์ชันค่าจริงของจำนวนจริง

- **บทนิยาม 11 :**

ให้ f เป็นฟังก์ชันใดๆ สำหรับแต่ละ $(x, y) \in f$ ซึ่ง f เป็นฟังก์ชันจะเรียก y ว่า ภาพ(Image) ของ x หรือเรียกว่า x ว่าอินเวอร์สอิมเมจ (Inverse Image) หรือ บุพภาพ (Pre-image) ของ y ภายใต้ฟังก์ชัน f และแทนสัญลักษณ์ $(x, y) \in f$ ด้วย $y = f(x)$

ประเภทฟังก์ชัน

- **บทนิยาม 12 :**

f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B (Function from A into B) ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $D_f = A$ และ $R_f \subseteq B$ เขียนแทนด้วย $f : A \rightarrow B$

ทฤษฎี : การเท่ากันของฟังก์ชัน

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน แล้ว $f = g$ ก็ต่อเมื่อ $D_f = D_g$ และ $f(x) = g(x)$ ทุกๆ $x \in D_f$

ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง

- **บทนิยาม 13 :** $f : A \to B$ จะกล่าวว่า

1. f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (One-to-one หรือ Injection) หรือฟังก์ชัน 1–1 ก็ต่อเมื่อ

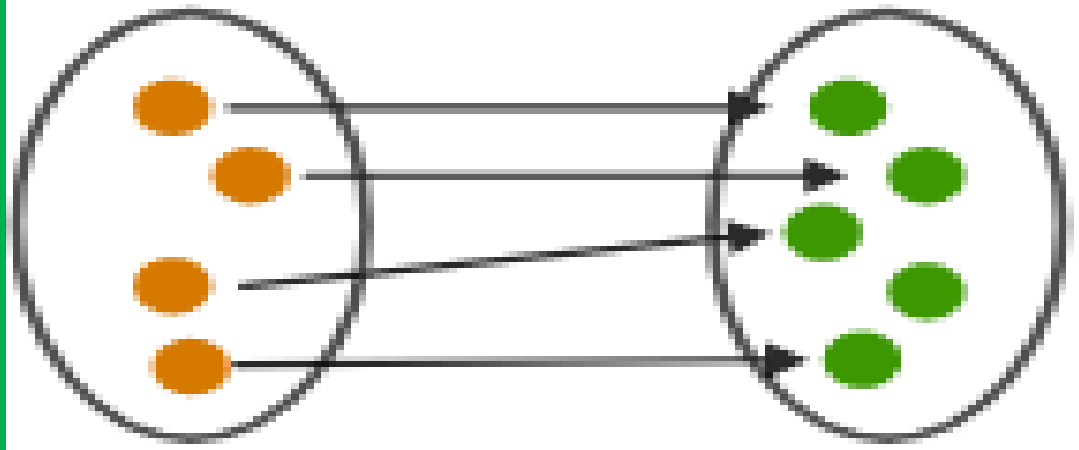
$\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$ เขียนด้วย $f : A \xrightarrow{1-1} B$

2. f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง (Onto function หรือ Surjection) ก็ต่อเมื่อ $R_f = B$ หรือ

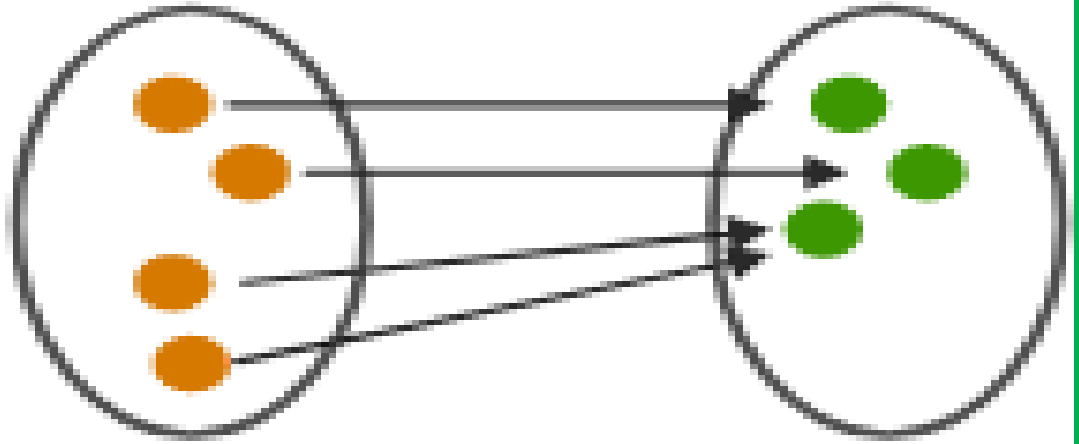
$\forall y \in B \exists x \in A, y = f(x)$ เขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow{\text{onto}} B$

3. f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง (Bijection) หรือการสมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่ง (One-to-one correspondence) ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน 1-1 และ f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง เขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B$

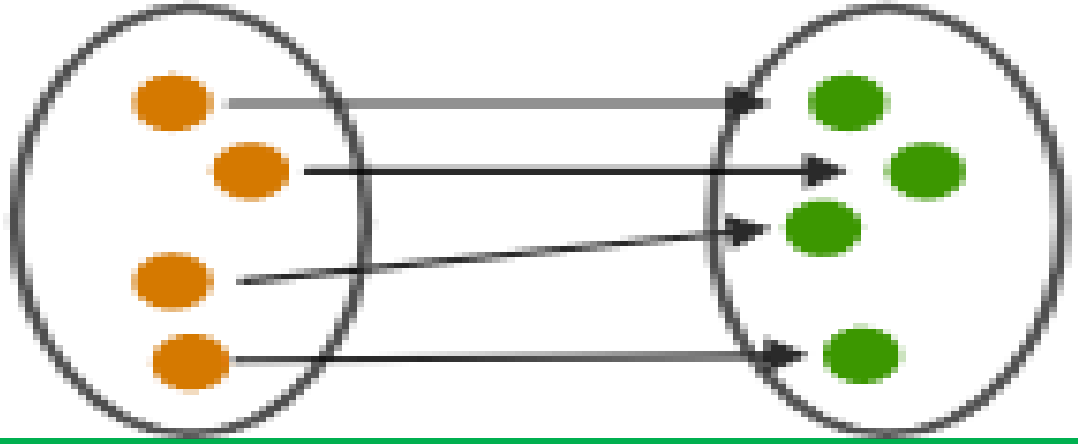
Injection (One-to-One)

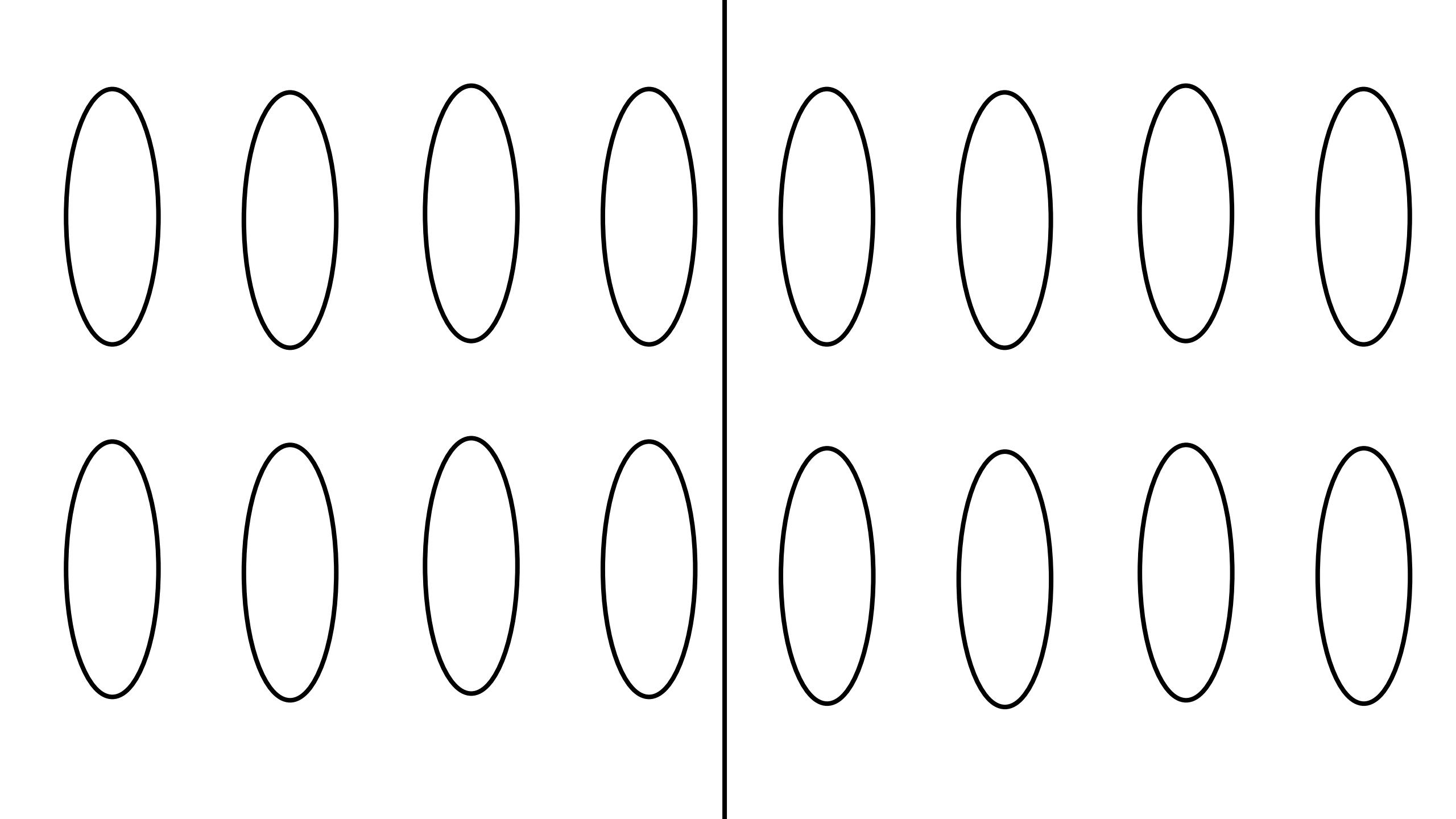


Surjection (Onto)



Bijection (One-to-One and Onto)





ฟังก์ชันผกผันและฟังก์ชันประกอบ

- **บทนิยาม 14 : ฟังก์ชันผกผัน**

ให้ $f : A \to B$ จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันผกผันได้ (Invertible function) ก็ต่อเมื่อ

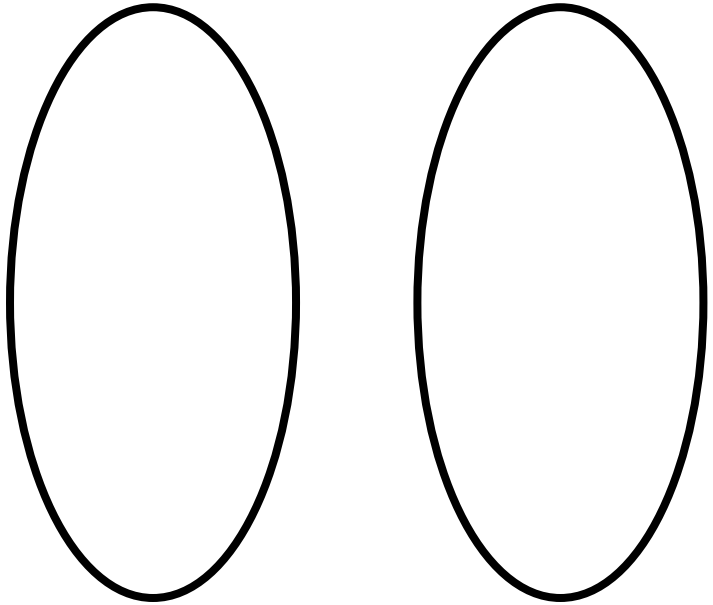
$f^{-1} = \{(y, x) \in f^{-1} \mid (x, y) \in f\}$ และเรียก f^{-1} ว่า "ฟังก์ชันผกผันของ f"

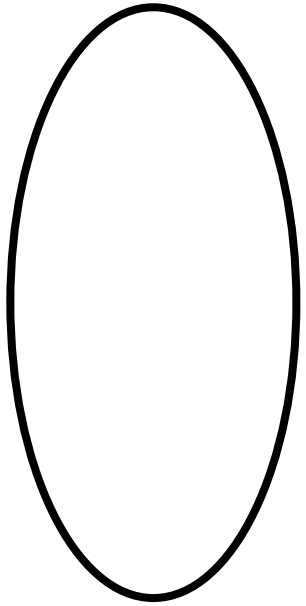
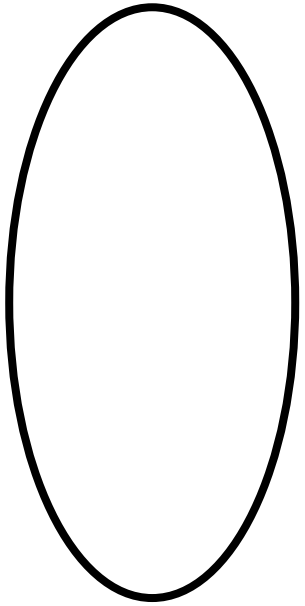
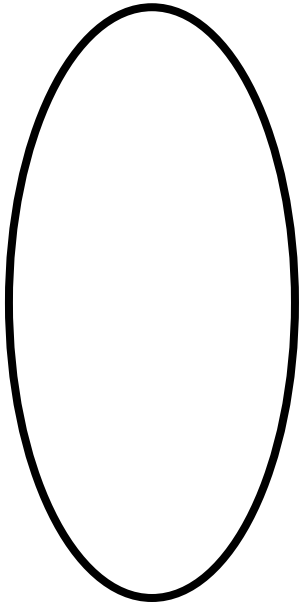
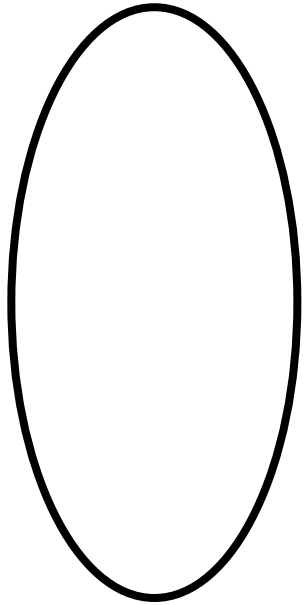
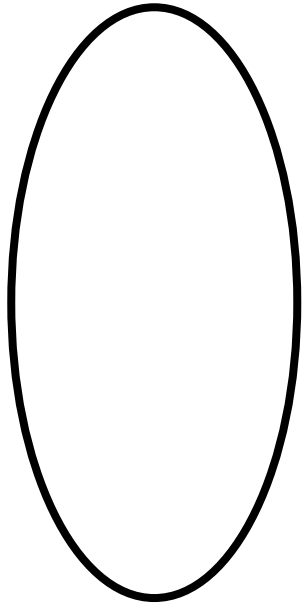
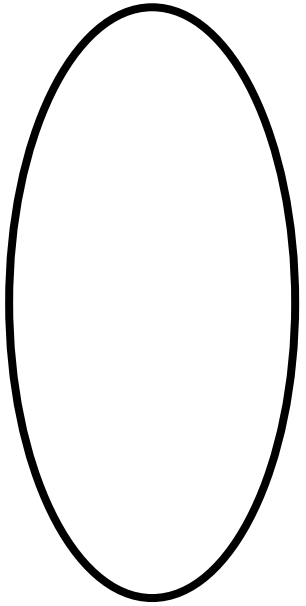
ทฤษฎีบท 1 f เป็นฟังก์ชันหาตัวผกผันได้ก็ต่อเมื่อ $f : A \xrightarrow{1-1} B$

ทฤษฎีบท 2 ถ้า $f : A \xrightarrow{1-1} B$ แล้ว $f^{-1} : B \xrightarrow{1-1} A$

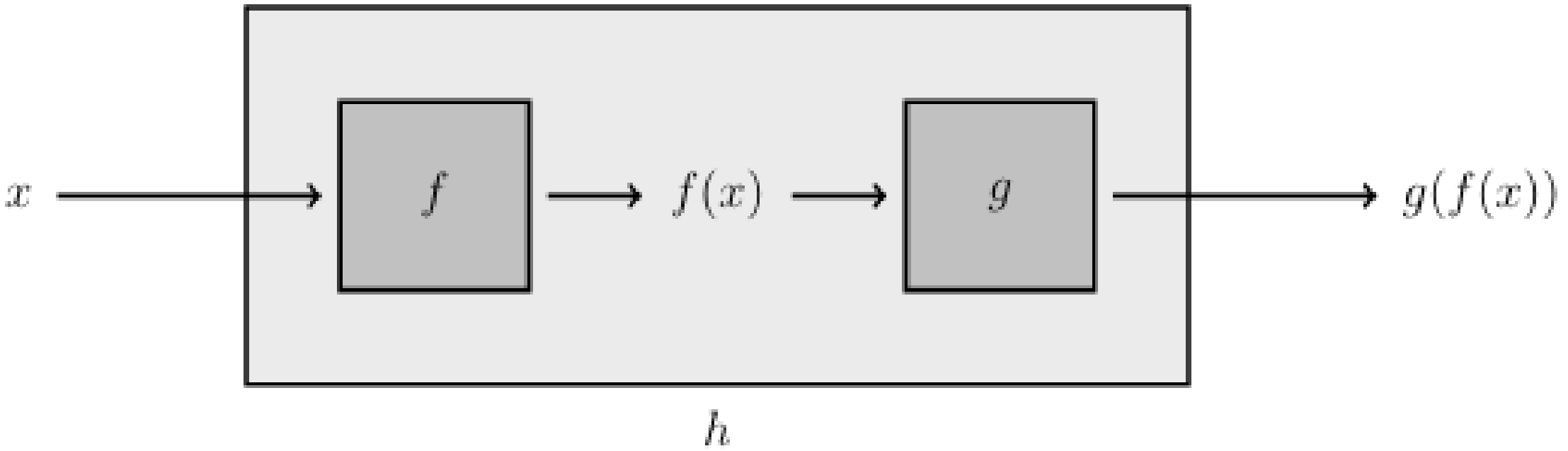
ทฤษฎีบท 3 $f : A \xrightarrow{1-1} B$ ก็ต่อเมื่อ $f^{-1} : B \xrightarrow{1-1} A$

ทฤษฎีบท 4 $f : A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B$ ก็ต่อเมื่อ $f^{-1} : B \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} A$



ฟังก์ชันผกผันและฟังก์ชันประกอบ



จะเรียกฟังก์ชัน h ที่ได้จากแนวคิดนี้ว่า **ฟังก์ชันประกอบ** (Composite function)

ฟังก์ชันผกผันและฟังก์ชันประกอบ

- **บทนิยาม 15 : ฟังก์ชันประกอบ**

ให้ $f : A \to B$ และ $g : B \to C$ จะได้ว่า ฟังก์ชันประกอบ (Composite of functions) ของ f และ g คือ

$$g \circ f = \{(x, z) \mid \exists y \in B, (x, y) \in f \wedge (y, z) \in g \}$$

สำหรับ $(x, y) \in f$ และ $(y, z) \in g$ อาจเขียนได้ว่า $y = f(x)$ และ $z = g(y) = g(f(x))$

ดังนั้น $g \circ f(x) = g(f(x))$ และจะหา $g \circ f$ ได้ ก็ต่อเมื่อ $R_f \subseteq D_g$ และ $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันจาก D_f ไป R_g

ฟังก์ชันผกผันและฟังก์ชันประกอบ

- ทฤษฎีบท: ให้ $f : A \to B$ และ $g : B \to C$ จะได้ว่า

1. ถ้า f เป็น g เป็นฟังก์ชัน 1-1 แล้ว $g \circ f$ เป็นฟังก์ชัน 1-1
2. ถ้า f เป็น g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง แล้ว $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง
3. ถ้า f เป็น g เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง แล้ว $g \circ f$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง
4. **ถ้า $g \circ f$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แล้ว f เป็นฟังก์ชัน 1-1**
5. **ถ้า $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง แล้ว f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง**
6. **ถ้า $g \circ f$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง แล้ว f เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง**

พีชคณิตของฟังก์ชัน

1. **ผลบวก** (Sum) ของ f และ g เขียนแทนด้วย $f+g$ นิยามโดย

$$f+g=\{(x,y):y=f(x)+g(x) \text{ และ } x\in \mathrm{Dom}(f)\cap \mathrm{Dom}(g)\}$$

2. **ผลต่าง** (Difference) ของ f และ g เขียนแทนด้วย $f-g$ นิยามโดย

$$f-g=\{(x,y):y=f(x)-g(x) \text{ และ } x\in \mathrm{Dom}(f)\cap \mathrm{Dom}(g)\}$$

3. **ผลคูณ** (Product) ของ f และ g เขียนแทนด้วย fg นิยามโดย

$$fg=\{(x,y):y=f(x)g(x) \text{ และ } x\in \mathrm{Dom}(f)\cap \mathrm{Dom}(g)\}$$

4. **ผลหาร** (Quotient) ของ f และ g เขียนแทนด้วย $\frac{f}{g}$ นิยามโดย

$$\frac{f}{g}=\left\{(x,y):y=\frac{f(x)}{g(x)},\ x\in \mathrm{Dom}(f)\cap \mathrm{Dom}(g) \text{ และ } g(x)\neq 0\right\}$$