



เฉลย Assignment 8 MAI1305 ทฤษฎีจำนวน

หัวข้อ ทฤษฎีบทเศษเหลือของจีน (CRT) สัปดาห์ที่ 10 คะแนนเต็ม 10 คะแนน
ผู้สอน ผศ.ดร.วันชัยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

1. จงหาคำตอบของระบบสมการสมภาค

$$\begin{aligned}5x &\equiv 1 \pmod{7} \\6x &\equiv 2 \pmod{11}\end{aligned}$$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}5x &\equiv 1 \pmod{7} \\15x &\equiv 3 \pmod{7} \\x &\equiv 2 \pmod{7}\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}6x &\equiv 2 \pmod{11} \\12x &\equiv 4 \pmod{11} \\x &\equiv 4 \pmod{11}\end{aligned}$$

ดังนั้นระบบสมการดังกล่าวจะสอดคล้องระบบสมการ

$$\begin{aligned}x &\equiv 3 \pmod{7} \\x &\equiv 4 \pmod{11}\end{aligned}$$

พิจารณาสมการ

$$\begin{aligned}11x &\equiv 1 \pmod{7} \longrightarrow x_1 = 2 \\7x &\equiv 1 \pmod{11} \longrightarrow x_2 = -3\end{aligned}$$

จะได้ว่า $x_0 = 11(2)(3) + 7(-3)(4) = 66 - 84 = -18$ ดังนั้น

$$x \equiv -18 \equiv 59 \pmod{77} \quad \#$$

2. จงหาคำตอบของระบบสมการสมภาค

$$\begin{aligned}4x &\equiv 3 \pmod{5} \\7x &\equiv 1 \pmod{13}\end{aligned}$$

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}4x &\equiv 3 \pmod{5} \\-x &\equiv -2 \pmod{5} \\x &\equiv 2 \pmod{5}\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}7x &\equiv 1 \pmod{13} \\14x &\equiv 2 \pmod{13} \\x &\equiv 2 \pmod{11}\end{aligned}$$

ดังนั้นระบบสมการดังกล่าวจะสอดคล้องระบบสมการ

$$\begin{aligned}x &\equiv 2 \pmod{5} \\x &\equiv 2 \pmod{13}\end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท จะได้ว่า

$$x \equiv 2 \pmod{65} \quad \#$$

3. จงหาคำตอบของสมการ $25x \equiv 102 \pmod{357}$

แนวคำตอบ เนื่องจาก $357 = 3 \cdot 7 \cdot 17$ ดังนั้นคำตอบของสมการ $25x \equiv 102 \pmod{357}$ จะสอดคล้องกับระบบสมการ

$$\begin{aligned}25x &\equiv 102 \pmod{3} &\longrightarrow x &\equiv 0 \pmod{3} \\25x &\equiv 102 \pmod{7} &\longrightarrow 4x &\equiv 4 \pmod{7} \\25x &\equiv 102 \pmod{17} &\longrightarrow 8x &\equiv 0 \pmod{17}\end{aligned}$$

ดังนั้นคำตอบสอดคล้องระบบสมการ

$$\begin{aligned}x &\equiv 1 \pmod{7} \\x &\equiv 0 \pmod{51}\end{aligned}$$

พิจารณาสมการ

$$\begin{aligned}51x &\equiv 1 \pmod{7} &\longrightarrow x_1 &= -3 \\7x &\equiv 1 \pmod{51} &\longrightarrow x_2 &= a\end{aligned}$$

จะได้ว่า $x_0 = 51(-3)(1) + 7(a)(0) = -153$ ดังนั้น

$$x \equiv -153 \equiv 204 \pmod{357} \quad \#$$

4. จงหาคำตอบของสมการสมภาค $100x \equiv 1 \pmod{403}$

แนวคำตอบ เนื่องจาก $403 = 13 \cdot 31$ ดังนั้นคำตอบของสมการ $100x \equiv 1 \pmod{403}$ จะสอดคล้องกับระบบสมการ

$$\begin{aligned}100x &\equiv 1 \pmod{13} \\100x &\equiv 1 \pmod{31} \\x &\equiv 2 \pmod{7}\end{aligned}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}100x &\equiv 1 \pmod{13} \\9x &\equiv 1 \pmod{13} \\27x &\equiv 3 \pmod{13} \\x &\equiv 3 \pmod{13}\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}100x &\equiv 1 \pmod{31} \\7x &\equiv 1 \pmod{31} \\28x &\equiv 4 \pmod{31} \\-3x &\equiv 4 \pmod{31} \\-30x &\equiv 40 \pmod{31} \\x &\equiv 9 \pmod{31}\end{aligned}$$

ดังนั้นระบบสมการดังกล่าวจะสอดคล้องระบบสมการ

$$\begin{aligned}x &\equiv 3 \pmod{13} \\x &\equiv 9 \pmod{31}\end{aligned}$$

พิจารณาสมการ

$$\begin{aligned}31x &\equiv 1 \pmod{13} &\longrightarrow x_1 &= -5 \\13x &\equiv 1 \pmod{31} &\longrightarrow x_2 &= 12\end{aligned}$$

จะได้ว่า $x_0 = 31(-5)(3) + 13(12)(9) = -465 + 1404 = 939$ ดังนั้น

$$x \equiv 939 \equiv 133 \pmod{403} \quad \#$$

5. จงหาจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่สอดคล้องสมการ $49x \equiv 23 \pmod{55}$

แนวคำตอบ คำตอบของสมการ $49x \equiv 23 \pmod{55}$ จะสอดคล้องระบบสมการ

$$\begin{aligned}49x &\equiv 23 \pmod{5} \\49x &\equiv 23 \pmod{11}\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned}49x &\equiv 23 \pmod{5} \\-x &\equiv 3 \pmod{5} \\x &\equiv -3 \pmod{5} \\x &\equiv 2 \pmod{5}\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}49x &\equiv 23 \pmod{11} \\5x &\equiv 1 \pmod{11} \\10x &\equiv 2 \pmod{11} \\-x &\equiv 2 \pmod{11} \\x &\equiv -2 \pmod{11}\end{aligned}$$

ดังนั้นระบบสมการคือ

$$\begin{aligned}x &\equiv 2 \pmod{5} \\x &\equiv -2 \pmod{11}\end{aligned}$$

พิจารณาสมการ

$$\begin{aligned}11x &\equiv 1 \pmod{5} \longrightarrow x_1 = 1 \\5x &\equiv 1 \pmod{11} \longrightarrow x_2 = -2\end{aligned}$$

จะได้ว่า $x_0 = 11(1)(2) + 5(-2)(-2) = 42$ ดังนั้น $x \equiv 42 \pmod{55}$ สรุปได้ว่าจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่สอดคล้องสมการนี้คือ 42 #

6. จงหาคำตอบของระบบสมการสมภาค

$$\begin{aligned}x &\equiv 15 \pmod{21} \\x &\equiv 3 \pmod{15} \\x &\equiv 1 \pmod{14}\end{aligned}$$

แนวคำตอบ เนื่องจาก $\gcd(21, 15) = 3$ ซึ่ง $3 \mid (15 - 3)$, $\gcd(21, 14) = 7$ ซึ่ง $7 \mid (15 - 1)$

และ $\gcd(15, 14) = 1$ ซึ่ง $1 \mid (3 - 1)$ ดังนั้นระบบสมการนี้มีคำตอบ

จาก $x \equiv 15 \pmod{21}$ มีคำตอบเดียวกับระบบคำตอบของสมการ

$$\begin{aligned}x &\equiv 15 \pmod{3} \longrightarrow x \equiv 0 \pmod{3} \\x &\equiv 15 \pmod{7} \longrightarrow x \equiv 1 \pmod{7}\end{aligned}$$

จาก $x \equiv 3 \pmod{15}$ มีคำตอบเดียวกับระบบคำตอบของสมการ

$$\begin{aligned}x &\equiv 3 \pmod{3} \longrightarrow x \equiv 0 \pmod{3} \\x &\equiv 3 \pmod{5} \longrightarrow x \equiv 3 \pmod{5}\end{aligned}$$

ดังนั้นคำตอบของระบบสมการนี้จะสอดคล้องระบบสมการ

$$\begin{aligned}x &\equiv 0 \pmod{3} \\x &\equiv 3 \pmod{5} \\x &\equiv 1 \pmod{14}\end{aligned}$$

ให้ $a_1 = 0, a_2 = 3, a_3 = 1, m_1 = 3, m_2 = 5, m_3 = 14$ พิจารณาระบบสมการ

$$\begin{aligned}5(14)x &= 70x = x \equiv 1 \pmod{3} \dots (1) \\3(14)x &= 42x = 2x \equiv 1 \pmod{5} \dots (2) \\3(5)x &= 15x = x \equiv 1 \pmod{14} \dots (3)\end{aligned}$$

จะได้ว่า $x_1 = 1, x_2 = -2$ และ $x_3 = 1$ เป็นค่าของระบบสมการ (1), (2) และ (3) ตามลำดับ แล้ว

$$\begin{aligned} x_0 &= m_2 m_3 x_1 a_1 + m_1 m_3 x_2 a_2 + m_1 m_2 x_3 a_3 \\ &= 5(14)(1)(0) + 3(14)(-2)(3) + 3(5)(1)(1) \\ &= 0 - 252 + 15 \\ &= -237 \end{aligned}$$

จะได้ว่าคำตอบของระบบสมการนี้คือ $x \equiv -237 \equiv 183 \pmod{210}$ นั่นคือ

$$183 + 210t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

7. จงหาคำตอบของระบบสมการสมภาค

$$\begin{aligned} x &\equiv 5 \pmod{22} \\ x &\equiv 13 \pmod{10} \\ x &\equiv 8 \pmod{15} \end{aligned}$$

แนวคำตอบ เนื่องจาก $\gcd(22, 10) = 2$ ซึ่ง $2 \mid (5 - 13)$, $\gcd(22, 15) = 1$ ซึ่ง $1 \mid (5 - 8)$

และ $\gcd(10, 15) = 5$ ซึ่ง $5 \mid (13 - 8)$ ดังนั้นระบบสมการนี้มีคำตอบ

จาก $x \equiv 5 \pmod{22}$ มีคำตอบเดียวกับระบบคำตอบของสมการ

$$\begin{aligned} x &\equiv 5 \pmod{2} \longrightarrow x \equiv 1 \pmod{2} \\ x &\equiv 5 \pmod{11} \longrightarrow x \equiv 5 \pmod{11} \end{aligned}$$

จาก $x \equiv 13 \pmod{10}$ มีคำตอบเดียวกับระบบคำตอบของสมการ

$$\begin{aligned} x &\equiv 13 \pmod{2} \longrightarrow x \equiv 1 \pmod{2} \\ x &\equiv 13 \pmod{5} \longrightarrow x \equiv 3 \pmod{5} \end{aligned}$$

จาก $x \equiv 8 \pmod{15}$ มีคำตอบเดียวกับระบบคำตอบของสมการ

$$\begin{aligned} x &\equiv 8 \pmod{3} \longrightarrow x \equiv 2 \pmod{3} \\ x &\equiv 8 \pmod{5} \longrightarrow x \equiv 3 \pmod{5} \end{aligned}$$

เนื่องจากค่าของสมการ $x \equiv 3 \pmod{4}$ จะเป็นคำตอบของสมการ $x \equiv 1 \pmod{2}$ ดังนั้นคำตอบของระบบสมการนี้จะสอดคล้องระบบสมการ

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{2} \\ x &\equiv 2 \pmod{3} \\ x &\equiv 3 \pmod{5} \\ x &\equiv 5 \pmod{11} \end{aligned}$$

ให้ $a_1 = 2, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 5, m_1 = 2, m_2 = 3, m_3 = 5, m_4 = 11$ พิจารณาระบบสมการ

$$\begin{aligned} 3(5)(11)x &= 165x = x \equiv 1 \pmod{2} \dots (1) \\ 2(5)(11)x &= 110x = -x \equiv 1 \pmod{3} \dots (2) \\ 2(3)(11)x &= 66x = x \equiv 1 \pmod{5} \dots (3) \\ 2(3)(5)x &= 30x = -3x \equiv 1 \pmod{11} \dots (4) \end{aligned}$$

จะได้ว่า $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 1$ และ $x_4 = 7$ เป็นค่าของระบบสมการ (1), (2), (3) และ (4) ตามลำดับ แล้ว

$$\begin{aligned} x_0 &= m_2 m_3 m_4 x_1 a_1 + m_1 m_3 m_4 x_2 a_2 + m_1 m_2 m_4 x_3 a_3 + m_1 m_2 m_3 x_4 a_4 \\ &= 3(5)(11)(1)(1) + 2(5)(11)(-1)(2) + 2(3)(11)(1)(3) + 2(3)(5)(7)(5) \\ &= 165 - 220 + 198 + 1050 \\ &= 1193 \end{aligned}$$

จะได้ว่าคำตอบของระบบสมการนี้คือ $x \equiv 1193 \equiv 203 \pmod{330}$ นั่นคือ

$$203 + 330t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

8. จงหาจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด เมื่อ

หารด้วย 10, 14 และ 20 เศษเหลือเท่ากับ 3, 5 และ 13 ตามลำดับ

โดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือของจีน (CRT)

แนวคำตอบ ให้ x เป็นจำนวนเต็มที่สุดคค้องเงื่อนไข

$$x \equiv 3 \pmod{10}$$

$$x \equiv 5 \pmod{14}$$

$$x \equiv 13 \pmod{20}$$

เนื่องจาก $\gcd(10, 14) = 2$ ซึ่ง $2 \mid (3 - 5)$, $\gcd(10, 20) = 10$ ซึ่ง $10 \mid (3 - 13)$

และ $\gcd(14, 20) = 2$ ซึ่ง $2 \mid (5 - 13)$ ดังนั้นระบบสมการนี้มีคำตอบ

จาก $x \equiv 3 \pmod{10}$ มีคำตอบเดียวกับระบบคำตอบของสมการ

$$x \equiv 3 \pmod{2} \longrightarrow x \equiv 1 \pmod{2}$$

$$x \equiv 3 \pmod{5} \longrightarrow x \equiv 3 \pmod{5}$$

จาก $x \equiv 5 \pmod{14}$ มีคำตอบเดียวกับระบบคำตอบของสมการ

$$x \equiv 5 \pmod{2} \longrightarrow x \equiv 1 \pmod{2}$$

$$x \equiv 5 \pmod{7} \longrightarrow x \equiv 5 \pmod{7}$$

จาก $x \equiv 13 \pmod{20}$ มีคำตอบเดียวกับระบบคำตอบของสมการ

$$x \equiv 13 \pmod{4} \longrightarrow x \equiv 1 \pmod{4}$$

$$x \equiv 13 \pmod{5} \longrightarrow x \equiv 3 \pmod{5}$$

เนื่องจากทุกคำตอบของสมการ $x \equiv 1 \pmod{4}$ จะเป็นคำตอบของสมการ $x \equiv 1 \pmod{2}$ ดังนั้นคำตอบของระบบสมการนี้จะสอดคล้องระบบสมการ

$$x \equiv 1 \pmod{4}$$

$$x \equiv 3 \pmod{5}$$

$$x \equiv 5 \pmod{7}$$

พิจารณาสมการ

$$5(7)x = 35x = -x \equiv 1 \pmod{4} \longrightarrow x_1 = -1$$

$$4(7)x = 28x = -2x \equiv 1 \pmod{5} \longrightarrow x_2 = 2$$

$$4(5)x = 20x = -x \equiv 1 \pmod{7} \longrightarrow x_3 = -1$$

$$x_0 = 5(7)(-1)(1) + 4(7)(2)(3) + 4(5)(-1)(5)$$

$$= -35 + 168 - 100$$

$$= 33$$

จะได้ว่าคำตอบของระบบสมการนี้คือ $x \equiv 33 \pmod{140}$ ดังนั้นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดเมื่อ หารด้วย 10, 14 และ 20 เศษเหลือเท่ากับ 3, 5 และ 13 ตามลำดับ เท่ากับ 33 #