บทที่ 1
เมทริกซ์

ในบทนี้จะศึกษาเกี่ยวกับพื้นฐานของเมทริกซ์ ในเรื่องการบวก การลบ การคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริง และการคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ เมทริกซ์สลับเปลี่ยน เมทริกซ์ผกผัน และเมทริกซ์ในรูปแบบต่าง ๆ รวมถึงสมบัติและทฤษฎีบทที่สำคัญของเมทริกซ์ โดยเราสามารถใช้เมทริกซ์แทนระบบสมการเชิงเส้น แล้วใช้การดำเนินต่าง ๆ เพื่อหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น การแปลงเชิงเส้นก็ใช้เมทริกซ์แปลงเป็นเมทริกซ์ต่าง ๆ ได้ และยังสามารถใช้เก็บข้อมูลที่ขึ้นกับตัวแปรต้นสองตัว โดยสามารถบวก คูณ และแยกเมทริกซ์ออกเป็นผลคูณของเมทริกซ์ได้หลายรูปแบบ เมทริกซ์จึงเป็นแนวความคิดที่มีความสำคัญยิ่งของพีชคณิตเชิงเส้น

เมทริกซ์

โดยทั่วไป เราสามารถพบเห็นข้อมูลหลายชนิดที่เขียนอยู่ในรูปกลุ่มของจำนวนซึ่งนำมาจัดเรียงกันในรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากได้มากมายในชีวิตประจำวัน ตัวอย่างเช่น ร้านค้าแห่งหนึ่งซื้อเครื่องเขียนมาขาย 4 ชนิด คือ ปากกา ดินสอ ไม้บรรทัด และยางลบ โดยราคาต้นทุนคิดเป็นต่อชิ้น แสดงเป็นตารางได้ดังนี้

ชนิดเครื่องเขียน	ปากกา	ดินสอ	ไม้บรรทัด	ยางลบ
ราคา/ชิ้น	15	10	8	7

ซึ่งสามารถเขียนสั้น ๆ เป็น $\begin{bmatrix} 15 & 10 & 8 & 7 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} 15 \\ 10 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$

หรือในการแข่งขันกีฬาบาสเกตบอลรายการหนึ่ง ตารางคะแนนแจ้งผลการแข่งขันได้ดังนี้

ทีม	ชนะ	แพ้	เสมอ
A	3	4	2
B	5	2	2
C	4	2	3
D	2	4	3
E	1	3	5

ซึ่งสามารถเขียนสั้น ๆ เป็น $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

หรือในทางคณิตศาสตร์ เราสามารถจัดเรียงสัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 25 \\ -x + 2y &= 10 \end{aligned}$$

ซึ่งสามารถเขียนสั้น ๆ เป็น $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

ดังที่ได้กล่าวมาทั้งหมดนี้เป็นตัวอย่างเบื้องต้นของเมทริกซ์ทั้งสิ้น และเนื่องจากวิชาพีชคณิตเชิงเส้นส่วนหนึ่งเป็นการศึกษาระบบสมการเชิงเส้น ในบทนี้จะขอทบทวนสมบัติพื้นฐานต่าง ๆ ของเมทริกซ์และการดำเนินการบนเมทริกซ์ การบวกและการลบเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริง และการคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ เพื่อใช้เมทริกซ์เป็นเครื่องมือในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นต่อไป รวมถึงดีเทอร์มิแนนต์และตัวผกผันสำหรับการคูณ

นิยาม 1.1 เมทริกซ์ (Matrix) คือ กลุ่มของจำนวนซึ่งนำมาจัดเรียงกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็นแถวตามแนวนอนและแนวตั้ง ซึ่งมีแถวตามแนวนอนเรียกว่า แถว (Row) และตามแนวตั้งเรียกว่า หลัก (Column) โดยปิดล้อมด้วยเครื่องหมายวงเล็บ ( ) หรือ [ ] เขียนในรูปทั่วไปดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

แทนด้วยสัญลักษณ์ $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ หรือ $A_{m\times n}$

เมื่อ a_{ij} เป็นสมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ j ของเมทริกซ์ โดยที่ $i = 1, 2, 3, \ldots, m$ และ $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ สำหรับเมทริกซ์ที่มี m แถว n หลัก กล่าวว่าเมทริกซ์นั้นมีมิติ (Dimension) หรืออันดับ (Order) $m\times n$

ตัวอย่างที่ 1.1 จงบอกมิติและแจกแจงสมาชิกในแต่ละเมทริกซ์ต่อไปนี้

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$
2. $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$
3. $C = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
4. $D = \begin{bmatrix} x & 6 \\ 2x & x^2 \end{bmatrix}$
5. $E = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

1. A เป็นเมทริกซ์มิติ 3×2
   และมีสมาชิกดังนี้ $a_{11} = 0,\ a_{12} = -1,\ a_{21} = 2$
   $a_{22} = 3,\ a_{31} = 1,\ a_{32} = 4$
2. B เป็นเมทริกซ์มิติ 1×4
   และมีสมาชิกดังนี้ $b_{11} = 2,\ b_{12} = -1,\ b_{13} = 0,\ b_{14} = 5$
3. C เป็นเมทริกซ์มิติ 2×2
   และมีสมาชิกดังนี้ $c_{11} = 0,\ c_{12} = 6,\ c_{21} = 2,\ c_{22} = 1$
4. D เป็นเมทริกซ์มิติ 2×2
   และมีสมาชิกดังนี้ $d_{11} = x,\ d_{12} = 6,\ d_{21} = 2x,\ d_{22} = x^2$
5. E เป็นเมทริกซ์มิติ 3×3
   และมีสมาชิกดังนี้ $e_{11} = 2,\ e_{12} = 6,\ e_{13} = 5$
   $e_{21} = 3,\ e_{22} = 7,\ e_{23} = 4$

เมทริกซ์แบบต่าง ๆ

เมทริกซ์ศูนย์ (Zero Matrix or Null Matrix) เมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ เราเรียกว่า เมทริกซ์ศูนย์ เขียนแทนด้วย $0_{m \times n}$ เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์จัตุรัส (Square Matrix) เมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนหลัก จะเรียกว่า เมตริกซ์จัตุรัสที่มี n แถว n หลัก ว่าเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$ หรือเมทริกซ์จัตุรัสมิติ n เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ทแยงมุม (Diagonal Matrix) เมทริกซ์จัตุรัสที่สมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลัก เป็นจำนวนจริงใด ๆ และสมาชิกนอกแนวทแยงมุมหลักทุกตัวเป็นศูนย์ เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์สเกลาร์ (Scalar Matrix) เมทริกซ์ทแยงมุมที่สมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลักมีค่าเท่ากันทุกตัว เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix) เมทริกซ์สเกลาร์มิติ $n \times n$ ที่มีสมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลักมีค่าเท่ากับ 1 เขียนแทนด้วย I_n เช่น

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์สามเหลี่ยม (Triangular Matrix) เมตริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกอยู่ด้านใดด้านหนึ่งของแนวทแยงมุมหลักเป็นศูนย์ทั้งหมด เรียกว่า **เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน** (Upper Triangular Matrix) ถ้าสมาชิกใต้เส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์ทุกตัว แต่ถ้าสมาชิกเหนือเส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์ทุกตัว เรียกว่า **เมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง** (Lower Triangular Matrix) เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{เมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง}$$

เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (Transpose of a Matrix) ถ้า A เมทริกซ์มิติ $m \times n$ แล้วเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของ A เขียนแทนด้วย A^t คือ เมทริกซ์ซึ่งได้จากการนำแถวของ A มาสร้างให้เป็นหลักของเมทริกซ์ A^t นั่นคือ ถ้า $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ แล้ว $A^t = \left[a_{ji}\right]_{n\times m}$ เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , \quad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B^t = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์สมมาตร (Symmetric Matrix) เมตริกซ์จัตุรัสที่มีสมบัติว่า $a_{ij} = a_{ji}$ สำหรับทุกค่า i และ j นั่นคือ ถ้า A เป็นเมทริกซ์สมมาตร จะได้ $A^t = A$ เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad A^t = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \text{ นั่นคือ } A^t = A$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & 8 \\ 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B^t = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & 8 \\ 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{นั่นคือ } B^t = B$$

เมทริกซ์เสมือนสมมาตร (Skew - Symmetric Matrix) เมตริกซ์จัตุรัสที่สมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์ทุกตัว และเป็นเมทริกซ์ที่มีสมบัติว่า $a_{ij} = -a_{ji}$ สำหรับทุกค่า i และ j นั่นคือ ถ้า A เป็นเมทริกซ์เสมือนสมมาตร จะได้ $A^t = -A$ เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ จะได้ } A^t = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = -A$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \text{ จะได้ } B^t = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = -B$$

เมทริกซ์ไม่เอกฐาน (Non - Singular Matric) เมตริกซ์จัตุรัสที่มีตัวผกผันสำหรับการคูณ หรือกล่าวคือ เมทริกซ์ไม่เอกฐานเป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีค่าตัวกำหนดหรือค่าดีเทอร์มิแนนต์ไม่เท่ากับศูนย์ เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad \det A = (1)(4)-(3)(2) = -2 \neq 0$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์เอกฐาน (Singular Matric) เมตริกซ์จัตุรัสที่ไม่มีตัวผกผันสำหรับการคูณ หรือกล่าวคือ เมทริกซ์เอกฐานเป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีค่าตัวกำหนดหรือค่าดีเทอร์มิแนนต์เท่ากับศูนย์ เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \det A = (2)(3)-(6)(1) = 0$$

นั่นคือ A ไม่มีตัวผกผัน

การดำเนินการบนเมทริกซ์

การเท่ากันของเมทริกซ์

เมทริกซ์สองเมทริกซ์จะเป็นเมทริกซ์ที่เท่ากัน ก็ต่อเมื่อ เมทริกซ์ทั้งสองมีมิติเท่ากัน และสมาชิกของเมทริกซีที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันเท่ากันทุกตัว ซึ่งนิยามได้ดังนี้

นิยาม 1.2 ถ้าเมทริกซ์ $A=[a_{ij}]$ และ $B=[b_{ij}]$ เท่ากัน เขียนแทนด้วย $A=B$ ก็ต่อเมื่อ A และ B มีมิติเดียวกัน และ $a_{ij}=b_{ij}$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ i และ j

ตัวอย่างที่ 1.2 จงหาค่า x และ y เมื่อกำหนดให้

$$\begin{bmatrix} x+3 & 6 \\ x+y & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ จากนิยาม 1.2 จะได้ว่า

$$x+3 = 9$$

หรือ $x = 6$

และ $x+y = 4$

$$y = 4-x = 4-(6) = -2$$

ดังนั้น $x = 6$ และ $y = -2$

ตัวอย่างที่ 1.3 จงหาค่า a และ b เมื่อกำหนดให้

$$\begin{bmatrix} a^2 & 6 \\ b^2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 4+b \\ 4 & a-2 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ จากนิยาม 1.2 จะได้ว่า

$a^2 = 25$ และ $a-2 = -7$

$a = \pm 5$ และ $a = -5$

นั่นคือ $a = -5$

และจาก $b^2 = 4$ และ $4+b = 6$

$$b = \pm 2 \quad \text{และ} \quad b = 2$$

นั่นคือ $b = 2$

ดังนั้น $a = -5$ และ $b = 2$

ตัวอย่างที่ 1.4 จงหาค่า a และ b เมื่อกำหนดให้

$$\begin{bmatrix} 2^a & \log b \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & (\log b)^2 \\ a & b \end{bmatrix}$$

วิธีทำ จากนิยาม 1.2 จะได้ว่า

$$2^a = 16$$

$$2^a = 2^4 = 16$$

นั่นคือ $a = 4$

และจาก $\log b = (\log b)^2$

ซึ่ง $(\log b)^2 - \log b = 0$

จะได้ว่า

$$\log b(\log b - 1) = 0$$

$$\log b = 0 \quad \text{หรือ} \quad \log b - 1 = 0$$

$$10^0 = b \qquad \log b = 1$$

$$\therefore b = 1 \qquad 10^1 = b$$

$$\therefore b = 10$$

นั่นคือ $b = 1$ และ 10

ดังนั้น $a = 4$ และ $b = 1, 10$

ตัวอย่างที่ 1.5 จงตรวจสอบว่า $A = B$ หรือไม่ เมื่อกำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad B = \begin{bmatrix} \sqrt{25} & a^0 \\ \log_a 1 & \ln e^6 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ว่า

$$5 = \sqrt{25} = 5$$

$$1 = a^0 = 1$$

$$0 = \log_a 1 \Rightarrow 0 = \log_a 1 = 0$$

และ $\ln e^6 = 6 \Rightarrow 6 = 6\ln e = 6(1) = 6$

ดังนั้น ค่าทุกค่าของเมทริกซ์ A และเมทริกซ์ B มีค่าเท่ากัน

นั่นคือ เมทริกซ์ $A = B$

การบวก และการลบเมทริกซ์

การนำเอาสมาชิกของเมทริกซ์ซึ่งอยู่ในตำแหน่งเดียวกันของเมทริกซ์ 2 เมทริกซ์ที่มีมิติเท่ากันมาบวกหรือลบกัน ทำให้ได้เมทริกซ์ใหม่ ดังนิยามต่อไปนี้

นิยาม 1.3 การบวกเมทริกซ์

ถ้าเมทริกซ์ $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเท่ากันแล้ว $A+B \;=\; [a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$ เมื่อ $i=1,2,3,\dots,m$ และ $j=1,2,3,\dots,n$

ตัวอย่างที่ 1.6 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ $A+B$

วิธีทำ

$$A+B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+1 & 5+2 \\ 2+7 & 1+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 1.7 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ $A+B$

วิธีทำ

$$A+B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+3 & -2+2 & 4+(-1) \\ 1+0 & 5+0 & 6+6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

นิยาม 1.4 การลบเมทริกซ์

ถ้าเมทริกซ์ $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเท่ากันแล้ว $A-B \;=\; [a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$ เมื่อ $i=1,2,3,\dots,m$ และ $j=1,2,3,\dots,n$

ตัวอย่างที่ 1.8 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ $A-B$

วิธีทำ

$$A-B = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 6-(-1) & -3-5 \\ 1-0 & 4-8 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 1.9 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ $A-B$

วิธีทำ

$$A-B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1-(-1) & -2-3 & 0-(-2) \\ 2-0 & 3-1 & 1-0 \\ 0-(-3) & -1-4 & 0-2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์

นิยาม 1.5 การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์

ถ้า $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ และ c เป็นสเกลาร์ แล้ว $cA=[ca_{ij}]_{m\times n}$ และ $Ac=[a_{ij}c]_{m\times n}$

ตัวอย่างที่ 1.10 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 9 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ $3A, -5B, 2C$

วิธีทำ $3A = 3\begin{bmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(-2) & 3(5) & 3(3) \\ 3(1) & 3(0) & 3(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 15 & 9 \\ 3 & 0 & 18 \end{bmatrix}$

$$-5B = (-5)\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 9 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-5)0 & (-5)4 \\ (-5)9 & (-5)3 \\ (-5)1 & (-5)2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -20 \\ -45 & -15 \\ -5 & -10 \end{bmatrix}$$

$$2C = 2\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(3) & 2(-2) \\ 2(0) & 2(5) \\ 2(1) & 2(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 0 & 10 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 1.11 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ X ที่ทำให้ $2X + A = B$

วิธีทำ จากโจทย์ $2X + A = B$ จะได้ว่า $2X = B - A$

$$X = \frac{1}{2}(B - A)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} -3-1 & 4-(-2) \\ 2-0 & 4-3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-4) & \frac{1}{2}(6) \\ \frac{1}{2}(2) & \frac{1}{2}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น เมทริกซ์ $X = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

นิยาม 1.5 การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ เป็นเมทริกซ์ จะได้ผลคูณ $C = AB = [c_{ij}]_{m \times p}$ โดยที่ $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$ หรือกล่าวว่า c_{ij} คือสมาชิกในแถวที่ i หลักที่ j ของเมทริกซ์ C ซึ่งได้จากการนำสมาชิกแถวที่ i ของ A คูณกับสมาชิกในหลักที่ j ของ B เป็นคู่ไปตามลำดับ แล้วนำมาบวกกัน

การดำเนินการตามนิยามข้างต้นสามารถแสดงในรูปทั่ว ๆ ไป ด้วยแผนภาพต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{c_{11}} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & c_{ij} & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

โดยที่ $c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \boxed{c_{ij}} & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

โดยที่ $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$

ข้อสังเกต : 1. ผลคูณของเมทริกซ์ A และเมทริกซ์ B จะหาได้ ก็ต่อเมื่อจำนวนหลักของ A เท่ากับจำนวนแถวของ B

2. เมทริกซ์ที่เป็นผลลัพธ์จะมีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนของ A และจำนวนหลักเท่ากับจำนวนหลักของ B

3. โดยทั่วไป ผลคูณของเมทริกซ์ A และเมทริกซ์ B จะได้ว่า AB ไม่เท่ากับ BA

ตัวอย่างที่ 1.12 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ AB

วิธีทำ จะได้ว่า

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0(1)+4(-3)+1(5) & 0(2)+4(0)+1(2) \\ 3(1)+2(-3)+2(5) & 3(2)+2(0)+2(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+(-12)+5 & 0+0+2 \\ 3+(-6)+10 & 6+0+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 1.13 กำหนดให้ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

จงหาค่าของ CD และ DC

วิธีทำ จะได้ว่า

$$CD = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(2)+0(-1)+2(4) & 1(1)+0(1)+2(0) \\ 2(2)+(-1)(-1)+0(4) & 2(1)+(-1)(1)+0(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+0+8 & 1+0+0 \\ 4+1+0 & 2+(-1)+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

และ

$$DC = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(1)+1(2) & 2(0)+1(-1) & 2(2)+1(0) \\ (-1)(1)+1(2) & (-1)(0)+1(-1) & (-1)(2)+1(0) \\ 4(1)+0(2) & 4(0)+0(-1) & 4(2)+0(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+2 & 0+(-1) & 4+0 \\ (-1)+2 & 0+(-1) & (-2)+0 \\ 4+0 & 0+0 & 8+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

ข้อสังเกต จากตัวอย่างข้างต้น ผลคูณ CD และ DC ต่างก็สามารถคูณกันได้ แต่เมทริกซ์ทั้งสองไม่เท่ากัน นั่นคือ $CD \neq DC$

ตัวอย่างที่ 1.14 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ จงหาตรวจสอบว่า $AB = BC$ หรือไม่

วิธีทำ จะได้ว่า $AB = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3(0)+0(0) & 3(2)+0(0) \\ 0(0)+0(0) & 0(2)+0(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+0 & 6+0 \\ 0+0 & 0+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

และ $BC = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0(0)+2(0) & 0(3)+2(3) \\ 0(0)+0(0) & 0(3)+0(3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+0 & 0+6 \\ 0+0 & 0+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $AB = BC$

ข้อสังเกต จากตัวอย่างข้างต้น พบว่า $AB = BC$ เป็นจริงได้ ถึงแม้ว่า $B \neq C$ หรือ $A \neq 0$ ในตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงว่าการคูณเมทริกซ์มีประโยชน์อย่างไร ในปัญหาการตัดสินใจ

ตัวอย่างที่ 1.15 ชาวสวนผลไม้ในจังหวัดเชียงราย ได้บรรทุกผลไม้เพื่อส่งไปขายในจังหวัดต่าง ๆ ดังนี้ จังหวัดเพชรบุรี จังหวัดลพบุรี จังหวัดกำแพงเพชร และจังหวัดอุดรธานี โดยในรถบรรทุกผลไม้คันนี้ประกอบด้วยส้มสายน้ำผึ้งจำนวน 500 เข่ง สตรอเบอรี่จำนวน 900 เข่ง และลำไยจำนวน 400 เข่ง ราคาขายต่อเข่งจะขึ้นกับชนิดของผลไม้และระยะทางของจังหวัดซึ่งกำหนดได้ตามตารางต่อไปนี้

ชนิดผลไม้ / **จังหวัด**	**ส้มสายน้ำผึ้ง**	**สตรอเบอรี่**	**ลำไย**
เพชรบุรี	100	70	90
ลพบุรี	50	200	150
กำแพงเพชร	300	100	40
อุดรธานี	200	150	170

อยากทราบว่าจังหวัดใดที่รถบรรทุกผลไม้ควรจะไปส่งเพื่อที่ว่าชาวสวนผลไม้จะได้รับกำไรสูงสุดจากการขายผลไม้ของเขา

วิธีทำ จากข้อมูลของโจทย์รถบรรทุกผลไม้คันนี้ ประกอบด้วยส้มสายน้ำผึ้งจำนวน 500 เข่ง สตรอเบอรี่จำนวน 900 เข่ง และลำไยจำนวน 400 เข่ง สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 500 \\ 900 \\ 400 \end{bmatrix}$$

และรายได้จากการบรรทุกผลไม้เพื่อส่งไปขายในจังหวัดต่าง ๆ เป็นดังนี้

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 100 & 70 & 90 \\ 50 & 200 & 150 \\ 300 & 100 & 40 \\ 200 & 150 & 170 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 500 \\ 900 \\ 400 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 100(500)+70(900)+90(400) \\ 50(500)+200(900)+150(400) \\ 300(500)+100(900)+40(400) \\ 200(500)+150(900)+170(400) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 50,000+63,000+36,000 \\ 25,000+180,000+60,000 \\ 150,000+90,000+16,000 \\ 100,000+135,000+68,000 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 149,000 \\ 265,000 \\ 256,000 \\ 303,000 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่า รายได้จากการบรรทุกผลไม้เพื่อส่งไปขายในจังหวัดอุดรธานีมากที่สุด ดังนั้นเพื่อให้ได้รับกำไรสูงสุดจากการขายผลไม้ ควรส่งผลไม้ไปขายที่จังหวัดอุดรธานี

การสลับเปลี่ยนของเมทริกซ์ (The Transpose of Matrices)

ถ้าแถวและหลักของเมทริกซ์มีการสลับที่กัน กล่าวคือ แถวที่หนึ่งของเมทริกซ์เปลี่ยนไปเป็นหลักที่หนึ่ง แถวที่สองของเมทริกซ์เปลี่ยนไปเป็นหลักที่สองทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งแถวในเมทริกซ์ที่กำหนดให้หมดไป เมทริกซ์ใหม่ที่ได้ใหม่นี้เรียกว่า “การสลับเปลี่ยนของเมทริกซ์” สัญลักษณ์ที่ใช้แทนการสลับเปลี่ยนของเมทริกซ์ คือ A^T หรือ A^t นั่นคือ ถ้า a_{ij} เป็นสมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ j ของเมทริกซ์ A แล้ว a_{ij} นี้จะเป็นสมาชิกในแถวที่ j และหลักที่ i ของ A^T ด้วย ไม่จำเป็นว่าเมทริกซ์ A ต้องเป็นเมตริกซ์จัตุรัส จึงจะสลับที่ได้

นิยาม 1.6 การสลับเปลี่ยนของเมทริกซ์

ถ้า $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ดังนั้น $B=[\mathrm{b}_{ij}]_{n\times m}$ ในเมื่อ $b_{ij}=a_{ji}$ เรียกว่าการสลับเปลี่ยนของเมทริกซ์ A ซึ่งเขียนแทนด้วย A^T โดยที่ $A^T = B = [\mathrm{b}_{ji}]_{n\times m} = [\mathrm{a}_{ji}]_{n\times m}$

ตัวอย่างที่ 1.16 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ จงหา A^T

วิธีทำ เนื่องจากเมทริกซ์ A มีสองแถว เพราะฉะนั้นถ้าสลับเปลี่ยนแถวที่หนึ่งใน A ไปเป็นหลักที่หนึ่งใน A^T และสลับเปลี่ยนแถวที่สองใน A ไปเป็นหลักที่สองใน A^T

ดังนั้น $A^T = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

หรือหา A^T โดยใช้นิยามข้างต้น

เพราะว่าเมทริกซ์ A มีมิติ 2×3 เพราะฉะนั้น A^T จะมีมิติ 3×2

$$A^T = B = [\mathrm{b}_{ji}]_{2\times 3} = [\mathrm{a}_{ji}]_{3\times 2}$$

นั่นคือ $b_{11} = a_{11} = 5$, $b_{12} = a_{21} = 2$

$b_{21} = a_{12} = 3$, $b_{22} = a_{22} = 1$

$b_{31} = a_{13} = 0$, $b_{32} = a_{23} = -1$

ดังนั้น $A^T = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

ทฤษฎีบท

ถ้า k เป็นสเกลาร์ใด ๆ และ A, B เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติแล้วจะได้ว่า

1. $\left(A^T\right)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$ และ $(A-B)^T = A^T - B^T$
3. $(AB)^T = B^T A^T$
4. $(kA)^T = kA^T$

อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์

นิยาม 1.7 ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสใด ๆ และถ้า B เป็นเมทริกซ์ ที่ซึ่ง $AB = BA = I_n$ แล้วจะเรียก B ว่า **เป็นอินเวอร์สการคูณของ** A

ถ้า A หาอินเวอร์สการคูณไม่ได้ เรียก A ว่า **เมทริกซ์เอกฐาน** (singular matrix)

ถ้า A หาอินเวอร์สการคูณได้ เรียก A ว่า **เมทริกซ์มิใช่เอกฐาน** (non-singular matrix)

ตัวอย่างที่ 1.17 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า B เป็นอินเวอร์สการคูณของ A

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2+3 & 1-1 \\ -6+6 & 3-2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} BA &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2+3 & -4+4 \\ \frac{3}{2}-\frac{3}{2} & 3-2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ดังนั้น $AB = BA = I_2$ แสดงว่า B เป็นอินเวอร์สการคูณของ A

ตัวอย่างที่ 1.18 จงแสดงว่า B เป็นอินเวอร์สการคูณของ A เมื่อกำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ จะแสดงว่า $AB = I_2$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1+2 & 2-2 \\ -1+1 & 2-1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

และแสดงว่า $BA = I_2$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} BA &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1+2 & 2-2 \\ -1+1 & 2-1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่า $AB = BA = I_2$ แสดงว่า B เป็นอินเวอร์สการคูณของ A

ทฤษฎีบท ถ้า B และ C เป็นอินเวอร์สการคูณ ของ A แล้ว $B = C$

ทฤษฎีบท ถ้า $A = [a]$ โดยที่ $a \neq 0$ แล้ว อินเวอร์สการคูณของ A หาได้จาก

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ โดยที่ $ad - bc \neq 0$ แล้ว อินเวอร์สการคูณของ A

หาได้จาก $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 1.19 จงหาอินเวอร์สการคูณของ A และ B เมื่อกำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{7(1)-3(2)}\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{7-6}\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

และ $B^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ เนื่องจาก $ad-bc = 0$ จึงไม่สามารถหาอินเวอร์สการคูณของ B ได้

สมบัติของอินเวอร์สของเมทริกซ์

ทฤษฎีบท

กำหนด A, B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติเดียวกัน และมีอินเวอร์ส์ การคูณ

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}$
4. A^{n} มีอินเวอร์สการคูณ และ $(A^{n})^{-1} = (A^{-1})^{n}$ เมื่อ $n = 0, 1, 2, \dots$
5. kA มีอินเวอร์สการคูณ และ $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ สำหรับจำนวนจริง $k \neq 0$

เมทริกซ์มูลฐานและวิธีหา A^{-1}

นิยาม 1.8 เมทริกซ์ E ที่มีมิติ $n\times n$ จะเรียกว่า **เมทริกซ์มูลฐาน** เมื่อ E เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการใช้การดำเนินการตามแถวเบื้องต้นชนิดใดชนิดหนึ่งเพียงครั้งเดียวบนเมทริกซ์เอกลักษณ์

ตัวอย่างที่ 1.20 เมทริกซ์ต่อไปนี้เป็นเมทริกซ์มูลฐาน

1. $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}$ เพราะ $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}$ $3R_2$

2. $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ เพราะ $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ $1R_1$

3. $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ เพราะ $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ $R_1\leftrightarrow R_3$

4. $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 4\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ เพราะ $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 4\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ $4R_4+R_2$

ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ $m\times n$ และ E เป็นเมทริกซ์มูลฐานมีมิติ $m\times n$ แล้วผลคูณ EA จะเป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการใช้การดำเนินการตามแถวเบื้องต้นชนิดเดียวกับ E บน A เช่น ให้ $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\0 & 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ 2×4 และ $E=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์มูลฐานที่เกิดจากการสลับแถวของ $I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ นั่นคือ

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\ R_1\leftrightarrow R_2$$

จะได้ $$EA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0(1)+1(0) & 0(2)+1(1) & 0(3)+1(2) & 0(4)+1(0) \\ 1(1)+0(0) & 1(2)+0(1) & 1(3)+0(2) & 1(4)+0(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+0 & 0+1 & 0+2 & 0+0 \\ 1+0 & 2+0 & 3+0 & 4+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จะเหมือนกับการสลับแถวที่ 1 กับแถวที่ 2 ของเมทริกซ์ A

ตัวอย่างที่ 1.21 จงหาผลคูณ EA เมื่อกำหนดให้

1. $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

2. $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

วิธีทำ 1. $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์มูลฐานที่เกิดจากการสลับแถวของ $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

นั่นคือ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $R_2 \leftrightarrow R_3$

ดังนั้น $$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

2. $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์มูลฐานที่เกิดจากการสลับแถวของ $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

นั่นคือ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $2R_1 + R_2$

$$\text{ดังนั้น} \quad EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท เมทริกซ์มูลฐานทุกเมทริกซ์เป็นเมทริกซ์ที่หาอินเวอร์สได้ และอินเวอร์สที่ได้จะเป็นเมทริกซ์มูลฐานด้วย

ทฤษฎีบท กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ $n \times n$ ข้อมูลต่อไปนี้สมมูลกัน

1. A มีอินเวอร์สการคูณ
2. $Ax = 0$ มีคำตอบชัดแจ้งเพียงคำตอบเดียว
3. $A = I_n$

วิธีการหาตัวผกผัน

ถ้ากำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ $n \times n$ และหาอินเวอร์สได้ จากทฤษฎีข้างต้น เราพบว่า $A = I_n$ แสดงว่าจะต้องมีเมทริกซ์มูลฐาน $E_1, E_2, \ldots, E_k$ ทำให้

$$E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A = I_n$$

แต่เนื่องจากเมทริกซ์มูลฐานเหล่านี้มีอินเวอร์ส จึงนำ $E_k^{-1}, \ldots, E_2^{-1}, E_1^{-1}$ คูณทั้งสองข้างอย่างต่อเนื่องกันจะได้

$$\begin{aligned} A &= E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_k^{-1} I_n \\ &= \left(E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1\right)^{-1} \\ A^{-1} &= E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 \end{aligned}$$

ด้วยเหตุนี้จึงเกิดกระบวนการหาอินเวอร์สของเมทริกซ์ A ดังนี้

1. เขียน $\left[A \mid I_n\right]$
2. ใช้การดำเนินการตามแถวเบื้องต้น $\left[A \mid I_n\right]$ จนได้ $\left[I_n \mid B\right]$
3. จะได้ $B = A^{-1}$

ตัวอย่างที่ 1.22 จงหาอินเวอร์สการคูณของ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \; -2R_1 + R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \; -R_1 + R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \; 2R_2 + R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \; -R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \; -3R_3 + R_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \; 3R_3 + R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \; -2R_2 + R_1$$

ดังนั้น

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

เราได้อธิบายวิธีการแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยใช้วิธีการกำจัดตัวแปรด้วยวิธีเกาส์ – จอร์แดนและวิธีเกาส์เซียนแล้ว ต่อไปนี้เราจะแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่มีจำนวนสมการเท่ากับจำนวนตัวแปรโดยวิธีอื่น

<u>ทฤษฎีบท</u> ถ้า A มีอินเวอร์สการคูณ มีมิติ n × n แล้วระบบสมการเชิงเส้น $AX = B$ จะมีคำตอบเดียว คือ $X = A^{-1}B$ สำหรับแต่ละ b ที่มีมิติ n × 1 ใด ๆ

ตัวอย่างที่ 1.23 จงแก้ระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 \qquad + 8x_3 = 17 \end{cases}$$

<u>วิธีทำ</u> ระบบสมการข้างต้นสามารถเขียนให้อยู่ในรูป $AX = B$ โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

จากตัวอย่าง 1.22 จะได้ว่า $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

จากทฤษฎีบท คำตอบของระบบสมการนี้ คือ

$$\begin{aligned} X = A^{-1}B &= \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -200 + 48 + 153 \\ 65 - 15 - 51 \\ 25 - 6 - 17 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

นั่นคือ $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2$

บทสรุป

เมทริกซ์ คือ การแสดงข้อมูลหรือตัวเลขชุดหนึ่งหรือกลุ่มหนึ่งด้วยการจัดลำดับของตัวเลขให้อยู่ในรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบด้วยแนวนอนและแนวตั้ง โดยความรู้เกี่ยวกับเมทริกซ์จะเป็นเครื่องมือที่ช่วยในการแก้ปัญหาระบบสมการเชิงเส้น โดยได้อธิบายคำจำกัดความของเมตริกซ์ ชนิดของเมทริกซ์ในรูปแบบต่าง ๆ การดำเนินการบนเมทริกซ์ทั้งการบวกเมทริกซ์ การลบเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริง และการคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ เมตริกซ์สลับเปลี่ยน เมทริกซ์ผกผัน เมตริกซ์มูลฐาน เพื่อเป็นพื้นฐานในการนำไปประยุกต์ในบทต่อ ๆ ไป