จำนวนจริง

จำนวนชนิดต่างๆ

จำนวนเต็ม (I) คือ จำนวนที่ลงตัวเป็นเลขเต็มหน่วย ไม่มีส่วนที่เป็นเศษส่วนหรือทศนิยม

- จำนวนเต็ม (I)
  - เต็มบวก (I^+)
  - เต็มศูนย์ (I^0)
  - เต็มลบ (I^-)

จำนวนเต็ม แบ่งเป็น 3 กลุ่ม ได้แก่

- จำนวนเต็มบวก (I^+) หรือ จำนวนนับ หรือ จำนวนธรรมชาติ (N) ได้แก่ $1, 2, 3, \ldots$
- จำนวนเต็มศูนย์ (I^0) ได้แก่ 0
- จำนวนเต็มลบ (I^-) ได้แก่ $-1, -2, -3, \ldots$

หมายเหตุ: จำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด คือ 1 แต่จะไม่มีจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุด
จำนวนเต็มลบที่มากที่สุด คือ -1 แต่จะไม่มีจำนวนเต็มลบที่น้อยที่สุด

จำนวนตรรกยะ (Q) คือ จำนวนที่เขียนในรูป $\frac{\text{จำนวนเต็ม}}{\text{จำนวนเต็ม}}$ ได้ (เมื่อตัวส่วน $\neq 0$)

- จำนวนตรรกยะ (Q)
  - จำนวนเต็ม (I)
    - เต็มบวก (I^+)
    - เต็มศูนย์ (I^0)
    - เต็มลบ (I^-)
  - เศษส่วน
  - ทศนิยม รู้จบ
  - ทศนิยม ไม่รู้จบ ซ้ำ

จำนวนตรรกยะ ประกอบด้วย

- จำนวนเต็ม เพราะเขียนเป็น $\frac{\text{จำนวนเต็ม}}{1}$ ได้ เช่น $5 = \frac{5}{1}$, $-2 = \frac{-2}{1}$
- เศษส่วน ที่อยู่ในรูป (หรือทำให้อยู่ในรูป) $\frac{\text{จำนวนเต็ม}}{\text{จำนวนเต็ม}}$ ได้ (เมื่อตัวส่วน $\neq 0$)
- ทศนิยม รู้จบ เพราะเขียนเป็น $\frac{\text{จำนวนเต็ม}}{\text{สิบ ร้อย พัน}}$ ได้ เช่น $0.7 = \frac{7}{10}$, $1.53 = \frac{153}{100}$
- ทศนิยม ไม่รู้จบ ซ้ำ เพราะมีสูตรแปลงเป็นเศษส่วนได้
  เช่น $0.\dot{3} = \frac{3}{9}$, $0.\dot{3}2\dot{6} = \frac{326}{999}$, $0.12\dot{3}5\dot{6} = \frac{12356-12}{99900} = \frac{12344}{99900}$

จำนวนอตรรกยะ (Q′) คือ จำนวนที่เขียนในรูป $\frac{\text{จำนวนเต็ม}}{\text{จำนวนเต็ม}}$ ไม่ได้ ซึ่งประกอบด้วย

- ทศนิยม ไม่รู้จบ ไม่ซ้ำ เช่น $1.010010001\ldots$, $2.214523015201364552 02\ldots$
- พวกถอดรากไม่ลงตัว เช่น $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, …
- ค่าคงที่พิเศษบางตัว เช่น π , e

หมายเหตุ: π ไม่ได้เท่ากับ $\frac{22}{7}$ หรือ 3.14 แต่ π มีค่าประมาณ $\frac{22}{7}$ หรือ 3.14
ค่า π จริงๆ มีค่าเท่ากับ $3.14159265358979323846264338327950288419716939 9\ldots$

หมายเหตุ2: ควรจำค่าประมาณของ $\sqrt{2}$ และ $\sqrt{3}$ ให้ได้ ($\sqrt{2} \sim 1.414$, $\sqrt{3} \sim 1.732$)

การบวกลบคูณหาร ของจำนวนตรรกยะและอตรรกยะ จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

- จำนวนตรรกยะ บวกลบคูณหารกัน ได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนตรรกยะเสมอ (เมื่อตัวหาร $\neq 0$)
- จำนวนอตรรกยะ บวกลบคูณหารกัน มีสิทธิเป็น ตรรกยะ หรือ อตรรกยะ ก็ได้

  เช่น $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ $\rightarrow$ อต $\times$ อต $=$ อต

  $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ $\rightarrow$ อต $\times$ อต $=$ ต
- ตรรกยะ บวกลบ อตรรกยะ ได้ อตรรกยะ เสมอ

  ตรรกยะ คูณหาร อตรรกยะ ได้ อตรรกยะ เสมอ ยกเว้น กรณีที่จำนวนตรรกยะนั้นเป็นศูนย์

จำนวนจริง (R) คือ จำนวนที่มีอยู่จริงๆ (บนเส้นจำนวน) ซึ่งประกอบด้วย จำนวนตรรกยะ และจำนวนอตรรกยะ ดังรูป

- จำนวนจริง (R)
  - จำนวนตรรกยะ (Q)
    - จำนวนเต็ม (I)
      - เต็มบวก (I^+)
      - เต็มศูนย์ (I^0)
      - เต็มลบ (I^-)
    - เศษส่วน
      ทศนิยม รู้จบ
      ทศนิยม ไม่รู้จบ ซ้ำ
  - จำนวนอตรรกยะ (Q')
    – ทศนิยม ไม่รู้จบ ไม่ซ้ำ
    – พวกถอดรากไม่ลงตัว
    – ค่าคงที่พิเศษ บางตัว เช่น π

และเราสามารถเติมเครื่องหมาย $+$ หรือ $-$ ไปบนหัว R หรือ Q ได้

- R^+ หมายถึง จำนวนจริงที่เป็นบวก
- R^- หมายถึง จำนวนจริงที่เป็นลบ
- Q^+ หมายถึง จำนวนตรรกยะที่เป็นบวก
- Q^- หมายถึง จำนวนตรรกยะที่เป็นลบ

หมายเหตุ: จำนวนทุกจำนวนที่เรารู้จักในชั้นนี้ จะเป็นจำนวนจริงทั้งหมด

จำนวนที่ไม่ใช่จำนวนจริง ได้แก่ รากที่คู่ของจำนวนลบ เช่น $\sqrt{-1}$ ซึ่งจะได้เรียนในเรื่องจำนวนเชิงซ้อน

สมบัติการเท่ากัน

จำนวนจริง มีสมบัติเกี่ยวกับการเท่ากันอยู่ 5 ข้อ ดังนี้

- สมบัติการสะท้อน $a = a$ เสมอ
- สมบัติการสมมาตร ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$
- สมบัติการถ่ายทอด ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$
- สมบัติการบวกด้วยตัวเท่า ถ้า $a = b$ แล้ว $a + c = b + c$
- สมบัติการคูณด้วยตัวเท่า ถ้า $a = b$ แล้ว $ac = bc$

สมบัติการบวกและคูณ

จำนวนจริง มีสมบัติเกี่ยวกับการบวกและการคูณอยู่

	การบวก	การคูณ
สมบัติปิด	จำนวนจริงบวกกัน ยังคงได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนจริง	จำนวนจริงคูณกัน ยังคงได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนจริง
สมบัติสลับที่	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$
สมบัติเปลี่ยนกลุ่ม	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
สมบัติการมีเอกลักษณ์	มีเอกลักษณ์การบวก คือ 0	มีเอกลักษณ์การคูณ คือ 1
สมบัติการมีอินเวอร์ส	จำนวนจริงทุกตัว มีอินเวอร์สการบวกที่เป็นจำนวนจริง	จำนวนจริงทุกตัว (ยกเว้น 0) มีอินเวอร์สการคูณที่เป็นจำนวนจริง
สมบัติการแจกแจง	$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$	

พหุนาม

หัวข้อนี้ จะทบทวนคำศัพท์ที่ควรทราบในเรื่องพหุนาม

- เอกนาม คือ การคูณกันของ ตัวเลข กับ ตัวแปร^ยกกำลัง เต็มบวก หรือ ศูนย์
  เช่น $2x^5$, $-3a^4b^2$, $\sqrt{5}x^3y^2z$, x^2 , 6 , $-x$, $2^{-1}xy$, 0

- "สัมประสิทธิ์" คือ ส่วนที่เป็นตัวเลข , "ดีกรีของเอกนาม" คือ ผลบวกของเลขชี้กำลังของตัวแปร

เอกนาม	$2x^5$	$-3a^4b^2$	$\sqrt{5}x^3y^2z$	x^2	6	$-x$	$2^{-1}xy$	0
สัมประสิทธิ์	2	-3	$\sqrt{5}$	1	6	-1	2^{-1}	0
ดีกรี	5	6	6	2	0	1	2	หาไม่ได้

- บวกลบเอกนาม บวกได้เฉพาะเอกนามที่มีชุดตัวแปรเหมือนกัน โดยให้เอาสัมประสิทธิ์มาบวกกัน
  เช่น $2x^5 + 3x^5 = 5x^5$ $\quad$ $3a^2b + a^2b = 4a^2b$
  $2a^2b - ab^2 = 2a^2b - ab^2$ (บวกลบกันไม่ได้ เพราะชุดตัวแปรไม่เหมือนกัน)
  $\frac{3}{2}xyz^2 - z^2xy = \left(\frac{3}{2} - 1\right)xyz^2 = \left(\frac{3-2}{2}\right)xyz^2 = \frac{1}{2}xyz^2$

- คูณหารเอกนาม ให้เอาสัมประสิทธิ์ คูณหาร สัมประสิทธิ์ และเอาตัวแปร คูณหาร ตัวแปร ได้เลย
  เช่น $2a^2b \times 3abc = 6a^3b^2c$ $\quad$ $3xy^2z \times a^2bc = 3a^2bcxy^2z$
  $\frac{1}{2}x^2 \times \frac{4}{3}x^2 = \frac{2}{3}x^4$ $\quad$ $\frac{6x^3yz}{2xz^3} = \frac{3x^2y}{z^2}$

- พหุนาม คือ การบวกกันของเอกนาม ตั้งแต่ 1 ตัวขึ้นไป
  เช่น $2x^5 + 4x + 5$, $3a^2b + b^2 - 2$, $6 - 3x^2$, 2^{-3}

- เราจะเรียกเอกนามแต่ละตัวที่มาบวกกันเป็นพหุนาม ว่า "พจน์"
  เช่น $2x^5 + 4x + 5$ มี 3 พจน์ โดยพจน์แรกคือ $2x^5$, พจน์ที่สองคือ $4x$, พจน์ที่สามคือ 5

- ดีกรีของพหุนาม คือ ดีกรีของเอกนามที่ดีกรีสูงสุดแค่พจน์เดียว

พหุนาม	$2x^5 + 4x + 5$	$3a^2b + b^2 - 2$	$6 - 3x^2$	2^{-3}
ดีกรี	5	3	2	0

- เรานิยมแทน พหุนาม ด้วยสัญลักษณ์ $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$
  และสัญลักษณ์ $P(c)$ จะหมายถึง ค่าของ $P(x)$ เมื่อแทน x ด้วย c
  เช่น ถ้าให้ $P(x) = 2x^5 + 4x + 5$ จะได้ $P(1) = 2(1)^5 + 4(1) + 5 = 11$
  $P(-2) = 2(-2)^5 + 4(-2) + 5 = -67$
  ถ้าให้ $Q(x) = 6 - 3x^2$ จะได้ $Q(0) = 6 - 3(0)^2 = 6$
  $Q(1) = 6 - 3(1)^2 = 3$

- บวกลบพหุนาม ให้บวกลบเฉพาะเอกนามที่บวกลบกันได้ ถ้าบวกลบกันไม่ได้ก็ให้ปล่อยไว้เหมือนเดิม

  เช่น $(2x^5+4x+5)+(x^5-x^2-2x)=3x^5-x^2+2x+5$

  $$\begin{aligned}(x^2-2x-1)-(2x^2-x-2) &= x^2-2x-1-2x^2+x+2 \\ &= -x^2-x+1\end{aligned}$$

- คูณพหุนาม ให้ใช้หลักการกระจาย

  เช่น $$\begin{aligned}(2x^2+4x+5)(x^2-2) &= 2x^4-4x^2+4x^3-8x+5x^2-10 \\ &= 2x^4+4x^3+x^2-8x-10\end{aligned}$$

  สังเกตว่า ดีกรีของผลลัพธ์ จะเท่ากับ ผลรวมดีกรีของพหุนามที่มาคูณกัน เสมอ

- หารพหุนาม ให้ตั้งหารยาว

  เช่น $(x^2-2x+5)\div(x+2)$

  $$\begin{array}{r|r} & x-4 \\ x+2 & x^2-2x+5 \\ & \underline{x^2+2x\phantom{{}+5}} \\ & -4x+5 \\ & \underline{-4x-8} \\ & \underline{13} \end{array}$$

  โดยจะได้ ตัวตั้ง $=$ (ตัวหาร $\times$ ผลหาร) $+$ เศษ

  นั่นคือ $x^2-2x+5=(x+2)(x-4)+13$

  สังเกตว่า ดีกรีของผลลัพธ์ จะเท่ากับ ดีกรีตัวตั้ง – ดีกรีตัวหาร เสมอ

- การเทียบสัมประสิทธิ์ ทำได้เมื่อ พหุนามมีค่าเท่ากัน ไม่ว่าจะแทน x ด้วยอะไร

  เช่น ถ้า $ax^3+bx^2+cx+d = 2x^3-3x^2+5$ <u>สำหรับ ทุกๆ x</u>

  เราจะได้ทันทีว่า $a=2$, $b=-3$, $c=0$, $d=5$

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. กำหนดให้ $P(x) = x^2-1$, $Q(x) = 3x+2$, $R(x) = P(x)-Q(x)$ จงหาค่าของ $R(2)$

2. ถ้า $P(x)$ หารด้วย $2x-1$ ลงตัว ได้ผลลัพธ์ $x+2$ แล้ว จงหา $P(x)$

3. ถ้า $P(x)$ หารด้วย x^2-1 ได้ผลลัพธ์ $2x+3$ เศษ $x-1$ แล้ว จงหา $P(x)$