บทที่ 5 สมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น

1. สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

คำจำกัดความ

- **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ**(Ordinary Differential Equation **หรือ** ODE)
  หมายถึง สมการที่มีตัวแปรอิสระและตัวแปรตาม และอนุพันธ์ของตัวแปรตามเทียบกับตัวแปรอิสระ **หนึ่งตัวเท่านั้น**

เช่น

$1. \dfrac{dy}{dx} + 2y = 3x$

$2. y'' + y \quad = 0$

$3. \dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} = 1 + 3y^2$

- **อันดับของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ** (Order of Ordinary Differential Equation)
  หมายถึง อันดับสูงสุดของอนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการ นั้นๆ

เช่น

$1. y' + 2y \quad = 3x$

$2. (y'')^3 + y' + 3y \quad = 0$

$3. F\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}, \dots, \dfrac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$

เราเรียก แบบข้อ 3 ว่า **รูปทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่** n

- ถ้าเราทำให้ทุกๆอนุพันธ์ในสมการเป็นเลขชี้กำลังเต็มบวกที่น้อยที่สุด แล้ว **ระดับขั้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ** (Degree of ODE) คือ เลขชี้กำลังของอนุพันธ์ที่มีอันดับสูงสุดที่ปรากฏอยู่ในสมการเชิงอนุพันธ์สามัญนั้น

เช่น

$1. (y'')^3 + y' + 3y \quad = 0$

$2. (y''')^{\frac{2}{3}} - y'' \quad = 2$

บทนิยาม 1.1 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n ในตัวแปรตาม y และตัวแปรอิสระ x คือ สมการที่เขียนอยู่ในรูป

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=b(x)$$

เมื่อ $a_0(x), a_1(x), \dots a_n(x)$ และ $b(x)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงใดช่วงหนึ่งบน R และ $a_0(x) \neq 0$

- **สภาพเชิงเส้นของสมการ** (Linear of Equation)
    I. ตัวแปรตามและอนุพันธ์ของตัวแปรตามมีเลขชี้กำลังเป็นหนึ่งทุกพจน์
    II. ไม่มีพจน์ในรูปผลคูณของตัวแปรตามและ /หรือ อนุพันธ์ของตัวแปรตาม
    III. ไม่มีพจน์ในรูปฟังก์ชันอดิศัยของตัวแปรตาม

เช่น

- สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่ไม่ใช่สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้น เรียกว่า **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้น** (Nonlinear of Equation)

เช่น

2. ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n

บทนิยาม 2.1 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n

$$F\left[x,y,\frac{dy}{dx},\dots,\frac{d^ny}{dx^n}\right]=0 \qquad \dots (2.1)$$

เมื่อ F เป็นฟังก์ชันค่าจริงของ $n+1$ ตัวแปร ของตัวแปร $x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$

- ให้ $\emptyset(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงสำหรับทุก $x \in I$ และมีอนุพันธ์อันดับ n ทุก $x \in I$
- เรียก $\emptyset(x)$ ว่า **ผลเฉลยชัดแจ้ง** (Explicit Solution) ของ (2.1) บนช่วง I
  ถ้า ฟังก์ชัน $\emptyset(x)$ สอดคล้องเงื่อนไข

  $$F\left[x,\emptyset(x),\emptyset'(x),\emptyset''(x),\dots,\emptyset^n(x)\right]$$

  นิยามสำหรับทุก x บนช่วง I และ

  $$F\left[x,\emptyset(x),\emptyset'(x),\emptyset''(x),\dots,\emptyset^n(x)\right]=0$$

- จะเรียกความสัมพันธ์ $g(x,y)=0$ ว่า **ผลเฉลยโดยปริยาย**(Implicit Solution) ของสมการ (2.1)
- ผลเฉลยชัดแจ้งและผลเฉลยโดยปริยาย เรียกรวมว่า **ผลเฉลยเชิงเดียว**(Simply Solution)

ตัวอย่างที่ 1 จงแสดงว่าฟังก์ชัน $\emptyset(x) = 2sinx + 3cosx$; ทุก $x \in R$ เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ ทุก $x \in R$
วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 2 ความสัมพันธ์ $x^2 + y^2 - 25 = 0$ เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการ $x + y\frac{dy}{dx} = 0$ บนช่วง $I \in (-5,5)$ เนื่องจาก $x^2 + y^2 - 25 = 0$ กำหนดฟังก์ชันค่าจริงเป็น $\emptyset_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$ และ $\emptyset_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}$ ทุก $x \in I$ จงแสดงว่า $\emptyset_1(x)$ และ $\emptyset_2(x)$ เป็นผลเฉลยชัดแจ้ง
วิธีทำ

พิจารณา $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x$ ... (1)

ฟังก์ชัน $\emptyset_0(x) = x^3 - x^2 + 0$ เป็นผลเฉลยของ (1)

และ $\emptyset_1(x) =$

$\emptyset_2(x) =$

$\emptyset_3(x) =$

แต่ในที่จริงแล้ว สำหรับแต่ละจำนวนจริง c ฟังก์ชัน $\emptyset_c(x)$ นิยามสำหรับทุกจำนวนจริง x โดย

$$\emptyset_c(x) = x^3 - x^2 + c \qquad \text{… (2)}$$

$\emptyset_c(x)$ เป็นผลเฉลยของ (1) และเรียก c ว่า **ตัวคงค่าไม่เจาะจง** (Arbitrary Constant)

บทนิยาม 2.2 กำหนดให้ $F\left[x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right] = 0$ … (3)

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n

- เรียก $y = f(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ เมื่อ $c_1, c_2, \dots, c_n$ เป็นตัวคงค่าไม่เจาะจง n ตัวที่สอดคล้องกับสมการ(3) ว่า **ผลเฉลยทั่วไป**(General Solution)
- ถ้ากำหนด $c_1, c_2, \dots, c_n$ ในผลเฉลยทั่วไป ผลเฉลยที่ได้จะเรียกว่า **ผลเฉลยเฉพาะ** (Particular Solution)
- ผลเฉลยของสมการ(3) ที่ไม่สามารถหาได้จากการกำหนดค่า c ในผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3) เรียกว่า **ผลเฉลยเอกฐาน**(Singular Solution)

ตัวอย่างที่ 3 จงแสดงว่า $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx} + y = 0$ ... $(*)$

มีผลเฉลยทั่วไปคือ $y = cx - c^2$

วิธีทำ

3. ปัญหาค่าเริ่มต้นและปัญหาค่าขอบ

พิจารณา $\frac{d^2y}{dx^2} = -2$ … (3.1)
มีผลเฉลยทั่วไปคือ $\emptyset(x) = -x^2 + c_1x + c_2$ … (3.2)
และผลเฉลยเฉพาะเป็น $\emptyset(x) = -x^2 + 2$ … (3.3)
จะต้องกำหนดตัวคงค่าไม่เจาะจง c_1, c_2 โดย $c_1 = 0$ และ $c_2 = 2$ ทำได้ 2 แบบดังนี้

1. กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial Condition) เป็นการกำหนดค่าของผลเฉลย ณ จุด x เพียงจุดเดียว คือ
   $y(0) = 2 \quad , \; y'(0) = 0$

2. กำหนดเงื่อนไขขอบ(Boundary Condition) เป็นการกำหนดค่าของผลเฉลยจำนวน 2 จุด คือ
   $y(0) = 2 \quad , \; y(1) = 1$

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญร่วมกับเงื่อนไขเริ่มต้น เรียกว่า **ปัญหาค่าเริ่มต้น** (Initial Value Problem)
และสมการเชิงอนุพันธ์สามัญร่วมกับเงื่อนไขขอบ เรียกว่า **ปัญหาค่าขอบ** (Boundary Value Problem)

ตัวอย่างที่ 4 จงแสดงว่า $\emptyset(x) = sinx - cosx$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ … (4)
เมื่อ $y(0) = -1 \, , y'(0) = 1$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 5 จงแสดงว่า $\emptyset(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของ

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0 \qquad \ldots (3.5)$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นตัวคงค่าไม่เจาะจง และจงหาค่า c_1 และ c_2 เมื่อผลเฉลยทั่วไปสอดคล้องเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 2$ และ $y'(0) = -3$

วิธีทำ

2. สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาการหาผลเฉลยในรูปแบบต่างๆ การจัดสมการให้อยู่ในรูปแบบเฉพาะของสมการนั้นๆ จะช่วยให้แก้สมการได้ง่ายและรวดเร็วขึ้น

2.1 **สมการแยกตัวแปรได้** (Separable Differential Equation)

บทนิยาม 1.1 สมการสามารถเขียนในรูป

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \quad \dots (2.1)$$

เราจะเรียกว่า สมการแยกตัวแปรได้ เช่น

$$x^2dx + (1 + y^2)dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 1}{2(y - 1)} \quad , y(0) = 1$$

จาก (2.1) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ

$$M(x)dx = -N(y)dy \quad \dots (2.2)$$

ในการหาผลเฉลย เราจะอินทิเกรตตลอดสมการ ดังนั้นในการแก้สมการชนิดแยกตัวแปรได้ จึงใช้ วิธีจัดรูปสมการที่โจทย์ให้มาให้อยู่ในรูป (2.2) แล้วอินทิเกรตตลอดสมการ

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้สมการ $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$ … (2.3)

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 2 จงแก้สมการ $xsinydx + (x^2 + 1)cosydy = 0\, , y(1) = \frac{\pi}{2}$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 3 จงแก้สมการ $(x-4)y^4dx - x^3(y^2-3)dy = 0$ … (2.4)
วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 4 จงแก้สมการ $e^{(x^3-y^2)}+\frac{y}{x^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 5 จงแก้สมการ $(2ycosy-siny)\frac{dy}{dx}=ysiny\,,y(0)=\frac{\pi}{2}$

วิธีทำ

สมการที่อยู่ในรูป $\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x+b_1y+m}{a_2x+b_2y+n}$ … (2.5)

เมื่อ $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$

เราจะเปลี่ยนตัวแปรใหม่โดยให้ $a_1x + b_1y + m = v$

ดังนั้น $y = \frac{1}{b_1}(v - a_1x - m)$ และ $\frac{dy}{dx} =$

เมื่อเอาค่าเหล่านี้แทนใน (2.5) จะได้

ตัวอย่างที่ 6 จงแก้สมการ

$(x - 2y + 3)dx - (x - 2y + 5)dy = 0$ … (2.6) เมื่อ $y(0) = 0$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 7 จงแก้สมการ $\frac{dy}{dx} = \frac{-(x+y+1)}{2x+2y+1}$ … (2.7)

วิธีทำ

สมการที่อยู่ในรูป

$yf(xy) + xg(xy)\frac{dy}{dx} = 0$ … (2.8)

เราสามารถหาผลเฉลยของสมการชนิดนี้โดยวิธีสมการแยกตัวแปรได้ โดยการเปลี่ยนตัวแปรใหม่

คือ ให้ $v = xy$ ซึ่ง $y = \frac{v}{x}$ และ $\frac{dy}{dx} = \frac{x\frac{dv}{dx} - v}{x^2}$

เมื่อเอาค่าเหล่านี้แทนใน (2.8) จะได้

เมื่ออินทิเกรตตลอดสมการจะได้ผลเฉลยในเทอมของ x และv เมื่อแทนค่า $v = xy$ จะได้ผลเฉลยในเทอมของ x และ y ตามต้องการ

ตัวอย่างที่ 8 จงแก้สมการ $(y - xy^2)dx - (x + x^2y)dy = 0$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 9 จงแก้สมการ $(x^2y^3 - y)dx + (x^3y^2 + 2x)dy = 0$
วิธีทำ

2. **สมการเอกพันธุ์** (Homogeneous Differential Equation)

ต่อไปนี้เราจะศึกษาถึง Differential Equation บางสมการที่ไม่สามารถจะแยกตัวแปรจากกันได้โดยตรง

บทนิยาม 2.1 เราเรียกฟังก์ชัน $F(x, y)$ ว่าเป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี $\boldsymbol{n}$ ถ้า

$$F(kx, ky) = k^nF(x, y)$$

เช่น $F(x, y) = 2x^4 - x^3y$ เป็นสมการเอกพันธ์ระดับขั้น 4

เพราะว่า

$F(x, y) = e^{\frac{y}{2x}} + tan\left(\frac{3y}{x}\right)$ เป็นสมการเอกพันธ์ระดับขั้น

เพราะว่า

บทนิยาม 2.2 เราเรียก $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ ว่า เป็นสมการเอกพันธุ์ ถ้าสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right) \text{ หรือ } \frac{dy}{dx} = F\left(\frac{x}{y}\right) \text{ ได้}$$

เช่น $1.\, x^2\frac{dy}{dx} = y^2 + 2xy$ เป็นสมการเอกพันธุ์

$2.\, \frac{dy}{dx} = lnx - lny + \left(\frac{x+y}{x-y}\right)$ เป็นสมการเอกพันธุ์

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3+2xy}{x^2}$

การหาผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์

ถ้าให้ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ เป็นสมการเอกพันธุ์

ให้ $u = \frac{y}{x}\ , y = ux \ \ \rightarrow \ \ y' = u + xu'$

แทนค่า y, y' ในสมการเอกพันธุ์ จะได้ สมการแยกกันได้ แล้วหาผลเฉลย

ตัวอย่างที่ 10 จงแก้สมการ $(x^2 - 3y^2) + 2xy\frac{dy}{dx} = 0 \cdots (2.9)$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 11 จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น $\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx - xdy = 0 \quad \cdots (2.10)$, $y(1) = 0$

วิธีทำ

3. สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นเชิงเส้นในสองตัวแปร

บทนิยาม 3.1

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0 \qquad \cdots (2.11)$$

กรณี 1 ถ้าเส้นตรง 2 เส้นตัดกัน และตัดกันที่จุด (h, k) โดยเลื่อนแกนทางขวา จะได้

$u = x - h$ และ $v = y - k$ หรือ

$x = u + h$ และ $y = v + k$

แทนค่าใน (3.1) จะได้สมการเอกพันธุ์

กรณี 2 ถ้าเส้นตรง 2 เส้นขนานกัน จะได้

$a_2x + b_2y = k(a_1x + b_1y)$

โดยให้ $w = a_1x + b_1y$ และนำไปแทนใน (2.11) จะได้

$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (k(a_1x + b_1y) + c_2)dy = 0$

เพราะว่า $dw = a_1dx + b_1dy$

เพราะฉะนั้น $dx =$

แทนค่า dw, dx ใน (1) แล้วหาผลเฉลย

ตัวอย่างที่ 12 จงแก้สมการ

$$(x - 2y + 1)dx + (4x - 3y - 6)dy = 0 \qquad \cdots (2.12)$$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 13 จงแก้สมการ

$$(x + 2y + 3)dx + (2x + 4y - 1)dy = 0 \qquad \cdots (2.13)$$

วิธีทำ

4. **สมการแม่นตรง**(Exact Equations)

ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ชนิดนี้ จะต้องมีความรู้เกี่ยวกับ อนุพันธ์ย่อย (partial derivative)

บทนิยาม 4.1 สมการ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$จะเป็นสมการแม่นตรงถ้า

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$$

การหาผลเฉลย อาจจะสังเกตเพื่อแยกสมการออกเป็นกลุ่มย่อยๆ เรียกวิธีนี้ว่า **วิธีการจัดกลุ่ม**

ตัวอย่างที่ 14 จงแก้สมการ $(2xy + 3y)dx + (x^2 + 3x)dy = 0 \qquad \cdots (2.14)$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 15 จงแก้สมการ $(3x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + 2y)dy = 0 \qquad \cdots (2.15)$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 16 จงแก้สมการ $(2y + 3x)dx + (y + 2x)dy = 0 \quad \cdots (2.16)$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 17 จงแก้สมการ $(x - 2xy + e^y)dx + (y - x^2 + xe^y)dy = 0 \quad \cdots (2.17)$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 18 จงหาผลเฉลย $(ysec^2x + secxtanx)dx + (tanx + 2y)dy = 0 \quad \cdots (2.18)$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 19 จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น $(2xcosy + 3x^2y)dx + (x^3 - x^2siny - y)dy = 0 \quad \cdots (2.19)$
เมื่อ $y(0) = 2$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 20 จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น $(2xy-3)dx+(x^2+4y)dy=0 \quad \cdots(2.20)$
เมื่อ $y(1)=2$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 21 จงหาผลเฉลยของ $(y-2x)dx-(2y-x)dy=0 \quad \cdots(2.21)$
เมื่อ $y(1)=2$

วิธีทำ