บทที่ 1 ลำดับและอนุกรม

1.ลำดับของจำนวนจริง

บทนิยาม 1.1 ลำดับของจำนวนจริงคือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น N และมีค่าเป็นจำนวนจริง
ถ้ากำหนดให้ a เป็นฟังก์ชันซึ่งมีค่า $a(n) = \frac{n}{n+2}$, $n \in N$
เราจะได้ว่า a เป็นลำดับของจำนวนจริงลำดับหนึ่ง

ในกรณีของฟังก์ชัน a ใดๆ ที่เป็นลำดับ เรานิยมเขียนบอกค่า $a(n)$ ด้วยสัญลักษณ์ a_n
ดังนั้นลำดับ a ใดๆจะเขียนได้เป็น

$$a = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \dots, (n, a_n), \dots\}$$

โดยปกติแล้วเราจะเขียนบอกถึงลำดับ a ด้วยสัญลักษณ์ $\{a_n\}$ หรือ $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$ หรือ
$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

สำหรับลำดับ $\{a_n\}$ ใดๆ เราเรียก a_n ว่า **พจน์ที่ n** ของลำดับ ในเรื่องของลำดับนี้ ปัญหาที่เราสนใจคือ เมื่อ n มีค่ามากๆ พจน์ที่ n ของลำดับมีค่าเข้าใกล้ หรือเท่ากับจำนวนจริงค่าใดค่าหนึ่งหรือไม่ ถ้ามีจำนวนจริงดังกล่าว เราจะเรียกจำนวนจริงนี้ว่า ลิมิตของลำดับ ซึ่งเราจะให้บทนิยามของลิมิตของลำดับ ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1.2 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ $L \in R$ เราจะกล่าวว่า L เป็น **ลิมิต** ของลำดับ $\{a_n\}$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับจำนวนจริงบวก ε ใดๆ เราสามารถหา $n_0 \in R$ ที่ทำให้ $|a_n - L| < \varepsilon$ ทุกๆจำนวนนับ $n > n_0$
และจะเขียนสัญลักษณ์แทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

ทฤษฎีบท 1.1 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกและ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

I. $\lim_{n\to\infty} c^n = \begin{cases} 0\,; & |c| < 1 \\ \infty\,; & |c| > 1 \end{cases}$

เช่น

II. $\lim\limits_{n\to\infty} c^{\frac{1}{n}} = 1$

เช่น

III. $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$

เช่น

IV. $\lim_{n\to\infty}\frac{lnn}{n}=0$

V. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{lnn}=\infty$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ

VI. $\lim_{n\to\infty}\frac{c^n}{n!}=0 \quad ; c\neq 0$

VII. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{c}{n}\right)^n=e^c$

เช่น

2.อนุกรมอนันต์

บทนิยาม 2.1 อนุกรมอนันต์ คือ ผลบวกของจำนวนจริงอนันต์พจน์

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

เมื่อ $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ a_n เป็นพจน์ที่ n หรือพจน์ทั่วไป

ตัวอย่าง

อนุกรมอนันต์ หมายถึง การพิจารณาผลบวกอนันต์พจน์ ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n$)

ให้ $S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\vdots$

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

เรียก S_n ว่า ผลบวกย่อยที่ n ของ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$\therefore\ S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

จะได้ อันดับของผลบวกย่อย คือ $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$

บทนิยาม 2.2 ให้ S_n เป็นผลบวกย่อยที่ n ของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

- ถ้า $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ โดยที่ S เป็นจำนวนจริง แล้ว อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ จะหาผลบวกได้ และมีผลบวกเท่ากับ S เราจะกล่าวว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **ลู่เข้า**
- ถ้า $\lim_{n\to\infty} S_n$ หาค่าไม่ได้ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ จะหาผลบวกไม่ได้ และอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **ลู่ออก**

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลบวกของอนุกรมอนันต์ $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi$; $a_n = \cos n\pi$ ทุก $n \in N$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลบวกของอนุกรมอนันต์ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$; $a_n = \frac{2}{n(n+1)}$ ทุก $n \in N$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลบวกของอนุกรมอนันต์ $\sum_{n=1}^{\infty} ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$; $a_n = ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ ทุก $n > 1$

วิธีทำ

บทนิยาม 2.3 อนุกรมเรขาคณิต คือ อนุกรมที่อยู่ในรูป

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

โดยที่ $a \neq 0$ เรียก r ว่า อัตราส่วนของอนุกรม

ตัวอย่าง

ทฤษฎีบท 2.1 อนุกรมเรขาคณิต

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

จะลู่เข้า ถ้า $|r| < 1$ และได้ผลบวก $\frac{a}{1-r}$ นั่นคือ $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$

ถ้า $|r| \geq 1$ ลู่ออก

บทนิยาม 2.4 อนุกรมพีหรืออนุกรมไฮเพอร์ฮามอนิก

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

โดยที่ $p > 0$

ตัวอย่าง

อนุกรมพีจะลู่เข้าเมื่อ

และลู่ออกเมื่อ

อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ เรียกว่า**อนุกรมฮาร์มอนิก** $(p=1)$

*3.*การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรม

ทฤษฎีบท 3.1 ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ลู่เข้าจะได้ว่า $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

ข้อสังเกต

1.ข้อความใน ทบ.3.1 สมมูลกับข้อความ

ถ้า $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$ หรือ $\lim_{n\to\infty}a_n$ หาค่าไม่ได้ แล้ว อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ***ลู่ออก***

2.ถ้า $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ แล้ว อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ อาจจะ ***ลู่เข้า*** หรือ ***ลู่ออก***ก็ได้

เช่น

ตัวอย่างที่ 4 จงตรวจสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่า ลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{3n^2+2n+1}$; $a_n = \frac{n^2+1}{3n^2+2n+1}$

วิธีทำ

2. $\sum_{n=1}^{\infty} lnn$; $a_n = lnn$ ทุก $n \geq 1$

วิธีทำ

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n}$; $a_n = \frac{e^n}{n}$ ทุก $n \geq 1$

วิธีทำ

4. $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 sin^3\left(\frac{1}{n}\right)$; $a_n = n^3 sin^3\left(\frac{1}{n}\right)$ ทุก $n \geq 1$

วิธีทำ

5. $\sum_{n=1}^{\infty} nsin^2\left(\frac{1}{n}\right)$; $a_n = nsin^2\left(\frac{1}{n}\right)$ ทุก $n \geq 1$

วิธีทำ

ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับอนุกรมอนันต์

1.ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมที่ลู่เข้า จะได้ว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ ลู่เข้าด้วย และ

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

2.ถ้า c เป็นค่าคงที่ไม่เท่ากับศูนย์ แล้วอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ จะเป็นอนุกรมที่ลู่เข้าหรือลู่ออกทั้งคู่

ในกรณีที่อนุกรมลู่เข้าจะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

3. สำหรับจำนวนเต็มบวก k ใดๆ จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$

และ $\sum_{n=k}^{\infty} a_n = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_n + \cdots$ จะลู่เข้าและลู่ออกทั้งคู่

ตัวอย่างที่ 5 จงตรวจสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่า ลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n+3^n}{5^n}\right)$

   วิธีทำ

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{4}{\sqrt{n}}\right)$

วิธีทำ

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^4}+\frac{1}{e^{\frac{1}{n}}}\right)$

วิธีทำ

3.1 การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมบวก

เป็นการทดสอบอนุกรมที่มี**ทุกพจน์เป็นบวก**เท่านั้น

ตัวอย่าง

วิธีการตรวจสอบอนุกรมบวก

1.ทดสอบโดยการเปรียบเทียบ 2.ทดสอบโดยการเปรียบเทียบลิมิต

3.ทดสอบด้วยปริพันธ์ 4.ทดสอบอัตราส่วน

5.ทดสอบด้วยรากที่ n

3.1.1 การทดสอบโดยการเปรียบเทียบ

วิธีนี้ใช้อนุกรมที่รู้แล้วว่า **ลู่เข้า** หรือ **ลู่ออก** มาเปรียบเทียบกับอนุกรมที่ต้องการทดสอบ ส่วนอนุกรมที่นำมาเปรียบเทียบเป็นอนุกรมเรขาคณิตและอนุกรมพี

ทฤษฎีบท 3.2 ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมที่ต้องการทดสอบ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมที่เลือกนำมาใช้ในการเปรียบเทียบ

1. ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าและ $a_n \leq b_n\ , n = 1,2,3, \ldots$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าด้วย
2. ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออกและ $a_n \geq b_n\ , n = 1,2,3, \ldots$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออกด้วย

ตัวอย่างที่ 6 จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก

$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2+4} \quad , \ a_n = \frac{3}{n^2+4}; n \geq 1$

วิธีทำ

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n-2}}$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{3n-2}}; n \geq 1$

วิธีทำ

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{3n-2}}$, $a_n = \frac{n+1}{n\sqrt{3n-2}}; n \geq 1$

วิธีทำ

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+1}{n^4+\sqrt{n}}$, $a_n = \frac{3n^2+1}{n^4+\sqrt{n}}; n \geq 1$

วิธีทำ

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$, $a_n = \frac{1}{2^n-1}; n \geq 1$

วิธีทำ

3.1.2 **การทดสอบโดยการเปรียบเทียบลิมิต**

ทฤษฎีบท 3.3 ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมบวก และสมมติว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$

1. ถ้า L เป็นจำนวนจริงและ $0 < L < \infty$ แล้ว

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออกด้วยกันทั้งคู่

2. ถ้า $L = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าด้วย

3. ถ้า $L = \infty$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออกด้วย

ตัวอย่างที่ 7 จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+1}{n^4+\sqrt{n}}$, $a_n=\frac{3n^2+1}{n^4+\sqrt{n}};n\geq 1$

วิธีทำ

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-1}$, $a_n=\frac{1}{2^n-1};n\geq 1$

วิธีทำ

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{inn}{n}$, $a_n=\frac{inn}{n}$

วิธีทำ

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{e^n\sqrt{n^2+2n}}$, $a_n = \frac{n+1}{e^n\sqrt{n^2+2n}}$

วิธีทำ

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2(lnn+1)}$, $a_n = \frac{3}{n^2(lnn+1)}$

วิธีทำ

6. $\sum_{n=1}^{\infty} sin^3\left(\frac{1}{n}\right)$

วิธีทำ

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+inn}$

วิธีทำ

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+cosn}{n(1+e^{-n})}$

วิธีทำ

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln(n+1)}{n^2+4}$

วิธีทำ

3.1.3 การทดสอบด้วยปริพันธ์

ทฤษฎีบท 3.4 ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมของจำนวนจริง ซึ่ง $a_n \geq 0$ และ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง ซึ่ง

1. ให้ $f(x) = a_x$ ทุก $x \in N$

2. มี $n_0 \in N$ ซึ่ง f เป็นฟังก์ชันลดและเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[n_0, \infty)$

3. $t_n = \int_{n_0}^{n} f(x)dx$, $n \geq n_0$

จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าถ้า $\{t_n\}$ หาค่าได้

และ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก ถ้า $\{t_n\}$ หาค่าไม่ได้

ตัวอย่างที่ *8* จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nlnn}$, $a_n = \frac{1}{nlnn}; n \geq 2$

วิธีทำ

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)2^{-(n^2+n+1)}$

วิธีทำ

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{inn}}{n}$

วิธีทำ

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^{n^3}}$

วิธีทำ

3.1.4 การทดสอบแบบอัตราส่วน

ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมซึ่ง $a_n > 0$ ทุกค่า n และ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$ จะได้ว่า

1. ถ้า $\rho < 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า
2. ถ้า $\rho > 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออก
3. ถ้า $\rho = 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ สรุปไม่ได้

หมายเหตุ สำหรับการทดสอบวิธีนี้สรุปไม่ได้ เมื่อ $\rho = 1$ เพราะ

ตัวอย่างที่ 9 จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก

$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$, $a_n = \frac{n^3}{2^n}$

วิธีทำ

$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!10^n}{3^n}$, $a_n = \frac{n!10^n}{3^n}$

วิธีทำ

$3. \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(n!)^2 2^n}{(2n+2)!}\right)$, $a_n = \left(\frac{(n!)^2 2^n}{(2n+2)!}\right)$

วิธีทำ

3.1.5 **การทดสอบด้วยรากที่ $\boldsymbol{n}$**

ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมซึ่ง $a_n > 0$ ทุกค่า n และ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} = L$ จะได้ว่า

1. ถ้า $L < 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า
2. ถ้า $L > 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออก
3. ถ้า $L = 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ สรุปไม่ได้ต้องเปลี่ยนวิธี

ตัวอย่างที่ 10 จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก

$1. \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n^2}$

วิธีทำ

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{ln(2^n+1)}\right)^n$

วิธีทำ

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}$

วิธีทำ

4. อนุกรมสลับ

อนุกรมสลับ คือ อนุกรมซึ่งมีพจน์บวกและลบสลับกันพจน์ต่อพจน์ นั่นคือ เป็นอนุกรมที่อยู่ในรูป

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots \qquad \rightarrow (1)$$

หรือ

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}b_n \quad = -b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - \cdots \qquad \rightarrow (2)$$

โดยที่ $b_n > 0$ ทุก n

ตัวอย่าง เช่น $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$ $\qquad , b_n =$

การทดสอบอนุกรมสลับ (Leibniz's Theorem)

อนุกรมที่อยู่ในรูป$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$ หรือ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}b_n$ โดยที่ $b_n > 0$ ทุก n จะลู่เข้าก็ต่อเมื่อ

1.$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

2. $b_n > b_{n+1}$ ทุกค่า $n \geq 1$

หมายเหตุ

1. ถ้าข้อ 2. ไม่เป็นจริง สรุปไม่ได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

2. ถ้า $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ แล้ว $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1} \neq 0$ ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$ ลู่ออก

ตัวอย่างที่ 11 จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก

1.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$; $p > 0$

วิธีทำ

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^4 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 2^n}$

วิธีทำ

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)(n^2+1)}{(-1)^n (n^3+2n+3)}$

วิธีทำ

5. การลู่เข้าแบบมีเงื่อนไขและการลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

บทนิยาม 5.1 เราจะกล่าวว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์**

ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ลู่เข้า และ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า

และจะกล่าวว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข**

ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า และ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ลู่ออก

เช่น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ ลู่เข้า

และ $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^3}\right| =$

เช่น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ ลู่เข้า

และ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

ทฤษฎีบท 5.1

1. ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าด้วย
2. ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออก แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ลู่ออกด้วย

ตัวอย่างที่ 12 จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้า แล้วเป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์หรือแบบมีเงื่อนไข

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sinn}{n^3+4}$

วิธีทำ

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$

วิธีทำ

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{ln(n+1)}$

วิธีทำ

ทฤษฎีบท 5.2 ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมใดๆ ซึ่ง $a_n \neq 0$ และให้ $lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ จะได้

1. ถ้า $\rho = 1$ แล้วสรุปไม่ได้

2. ถ้า $\rho < 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

3. ถ้า $\rho < 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออก

ตัวอย่างที่ 13 จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้า แล้วเป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์หรือแบบมีเงื่อนไข

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 10^n}{n!}$

วิธีทำ

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^n}{n^2}$

ทฤษฎีบท 5.3 ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมใดๆ ซึ่ง $a_n \neq 0$ และให้ $lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$ จะได้

1. ถ้า $\rho = 1$ แล้วสรุปไม่ได้

2. ถ้า $\rho < 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

3. ถ้า $\rho < 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออก

ตัวอย่างที่ 14 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(-5)^n}$

วิธีทำ

6.อนุกรมกำลัง

บทนิยาม 6.1 อนุกรมกำลังใน $x-a$ หมายถึง อนุกรมที่เขียนอยู่ในรูป

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

โดยที่ $a, c_n \in R$ เมื่อ $n = 0,1,2,\ldots$

เรียก c_n ว่า สัมประสิทธิ์ของอนุกรมกำลัง

และ a ว่าจุดศูนย์กลางของ อนุกรมกำลัง

ตัวอย่างอนุกรมกำลัง

พิจารณา $\sum_{n=0}^{\infty}(x+2)^n$

ต้องการ หาค่า x ที่ทำให้ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ ลู่เข้า

พิจารณา $\sum_{n=0}^{\infty}(x+2)^n$; $a_n = (x+2)^n$

จะใช้ **ทฤษฎีบท** 5.2 มาทำการหาค่า x

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$$

ดังนั้น $lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =$

กรณี 1

กรณี 2

ทฤษฎีบทที่ 6.1 ถ้าอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ มีรัศมีการลู่เข้าคือ R แล้วจะได้ว่า

1.อนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ เมื่อ $|x-a| < \mathrm{R}$

2.อนุกรมลู่ออกเมื่อ $|x-a| > \mathrm{R}$

3.ไม่สามารถสรุปได้เมื่อ $|x-a| = \mathrm{R}$

ตัวอย่างที่ 15 จงหารัศมีการลู่เข้า และช่วงการลู่เข้าของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-3)^n}{n4^n}$

วิธีทำ

ทฤษฎีบทที่ 6.2 ช่วงการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ เป็นแบบใดแบบหนึ่งใน 3 แบบ ต่อไปนี้

1.มีเพียงจุดเดียว คือ $x = a$ ช่วงการลู่เข้าคือ a และมีรัศมี 0

2.ช่วง $(\mathrm{a}-\mathrm{R}, \mathrm{a}+\mathrm{R})$ หรือ $(\mathrm{a}-\mathrm{R}, \mathrm{a}+\mathrm{R}]$ หรือ $[\mathrm{a}-\mathrm{R}, \mathrm{a}+\mathrm{R})$ หรือ $[\mathrm{a}-\mathrm{R}, \mathrm{a}+\mathrm{R}]$

3.ทุกค่าจริง x นั่นคือ ช่วงการลู่เข้า $(-\infty, \infty)$

ตัวอย่างที่ 16 จงหารัศมีการลู่เข้า และช่วงการลู่เข้าของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n 2^n}{(2n)!}$

วิธีทำ

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{100^n}$

วิธีทำ

วิธีหาค่ารัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง

พิจารณาอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$

กรณี $x = a$ จะได้ว่า $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ ลู่เข้า

กรณี $x \neq a$ กำหนดให้

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =$

อนุกรมนี้ลู่เข้าเมื่อ

ดังนั้น รัศมีของการลู่เข้าคือ

และช่วงของการลู่เข้าคือ

พิจารณาจุดปลายช่วงต่อ

หมายเหตุ 1. ถ้า $R = 0$ ช่วงของการลู่เข้าคือ $\{a\}$

2. ถ้า $R = \infty$ ช่วงของการลู่เข้าคือ $(-\infty, \infty)$

ตัวอย่างที่ 17 จงหาช่วงของการลู่เข้า และรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{n}$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 18 จงหาช่วงของการลู่เข้า และรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^{2n+1}}{(1+n)4^n}$

วิธีทำ

พิจารณา เขียน $f(x)$ ในรูปแบบของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$

เมื่อ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับ

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

$$= c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

$\therefore f(a) = c_0$

$f'(x) =$

$f'(a) =$

$f''(x) =$

$f''(a) =$

$f'''(x) =$

$f'''(a) =$

จาก $f(x) \quad = \quad c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$

แทนค่า $c_0, c_1, c_2, \ldots$ ในสมการจะได้

$f(x) \quad =$

บทนิยาม 6.2 ถ้า $f(x)$ มีอนุพันธ์ทุกอันดับที่ $x = a$ แล้วอนุกรมเทย์เลอร์ สำหรับ $f(x)$ รอบ $x = a$ คืออนุกรมกำลังที่อยู่ในรูป

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

เมื่อ $f^{(n)}(a) =$

และ $f^{(0)}(a) = f(a)$

ถ้า $x = 0$ จะได้อนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด $x = 0$

คือ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n}(0)}{n!}(x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n}(0)}{n!}(x)^n$

$= f(0) + f'(0)(x) + f''(0)(x)^2 + \cdots$

เรียกอนุกรมนี้ว่า **อนุกรมแมคคลอริน**

ตัวอย่างที่ 19 จงกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ รอบจุด $x = 2$พร้อมทั้งหาช่วงของการลู่เข้า และรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $f(x) = \frac{1}{x+1}$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 20 จงกระจายอนุกรมแมคคลอรินของ $ln(1+x)$ พร้อมทั้งหาช่วงของการลู่เข้า และรัศมีของการลู่เข้า

วิธีทำ