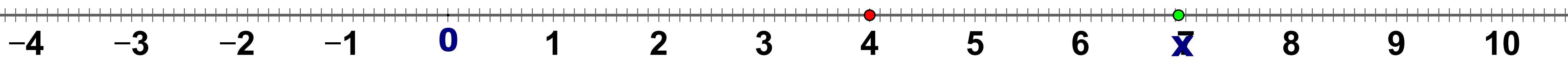
มโนมติของลิมิตของฟังก์ชัน



x = 6.93001

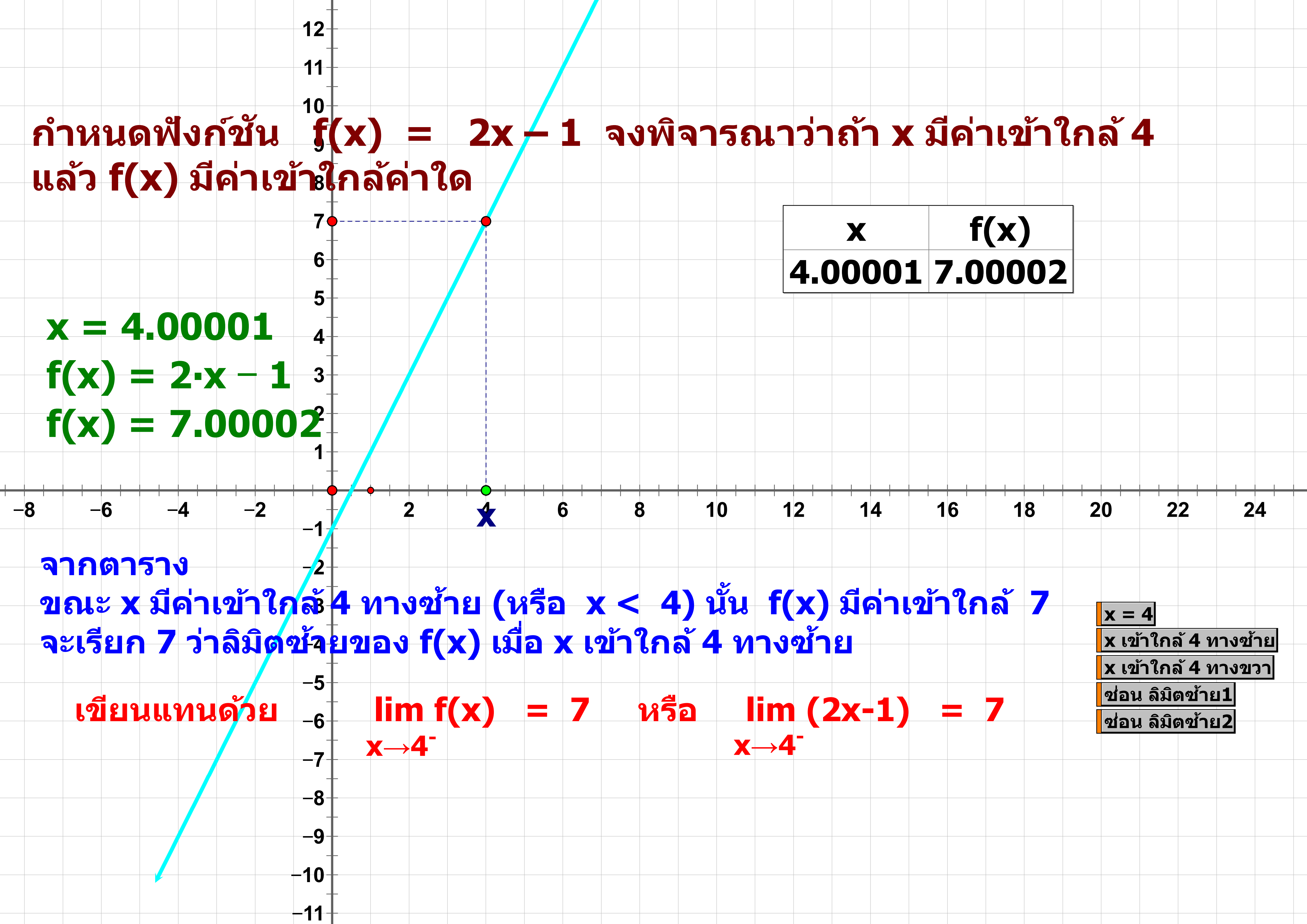
จากรูปถ้า x เป็นจำนวนใด ๆ แล้ว
คำว่า " x มีค่าเข้าใกล้ 4 " หมายความว่า x มีค่าน้อยกว่า 4 หรือ x มีค่ามากกว่า 4

สำหรับ x มีค่าน้อยกว่า 4 เรียกอีกอย่างหนึ่งว่า x มีค่าเข้าใกล้ 4 ทางซ้าย
เขียนแทนด้วย $x \to 4^-$

สำหรับ x มีค่ามากกว่า 4 เรียกอีกอย่างหนึ่งว่า x มีค่าเข้าใกล้ 4 ทางขวา
เขียนแทนด้วย $x \to 4^+$

x = 4
x เข้าใกล้ 4 ทางซ้าย
x เข้าใกล้ 4 ทางขวา

กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = 2x - 1$ จงพิจารณาว่าถ้า x มีค่าเข้าใกล้ 4 แล้ว f(x) มีค่าเข้าใกล้ค่าใด



x	f(x)
4.00001	7.00002

$x = 4.00001$

$f(x) = 2 \cdot x - 1$

$f(x) = 7.00002$

จากตาราง

ขณะ x มีค่าเข้าใกล้ 4 ทางซ้าย (หรือ $x < 4$) นั้น f(x) มีค่าเข้าใกล้ 7

จะเรียก 7 ว่าลิมิตซ้ายของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ 4 ทางซ้าย

เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 7$ หรือ $\lim\limits_{x \to 4^-} (2x-1) = 7$

x = 4

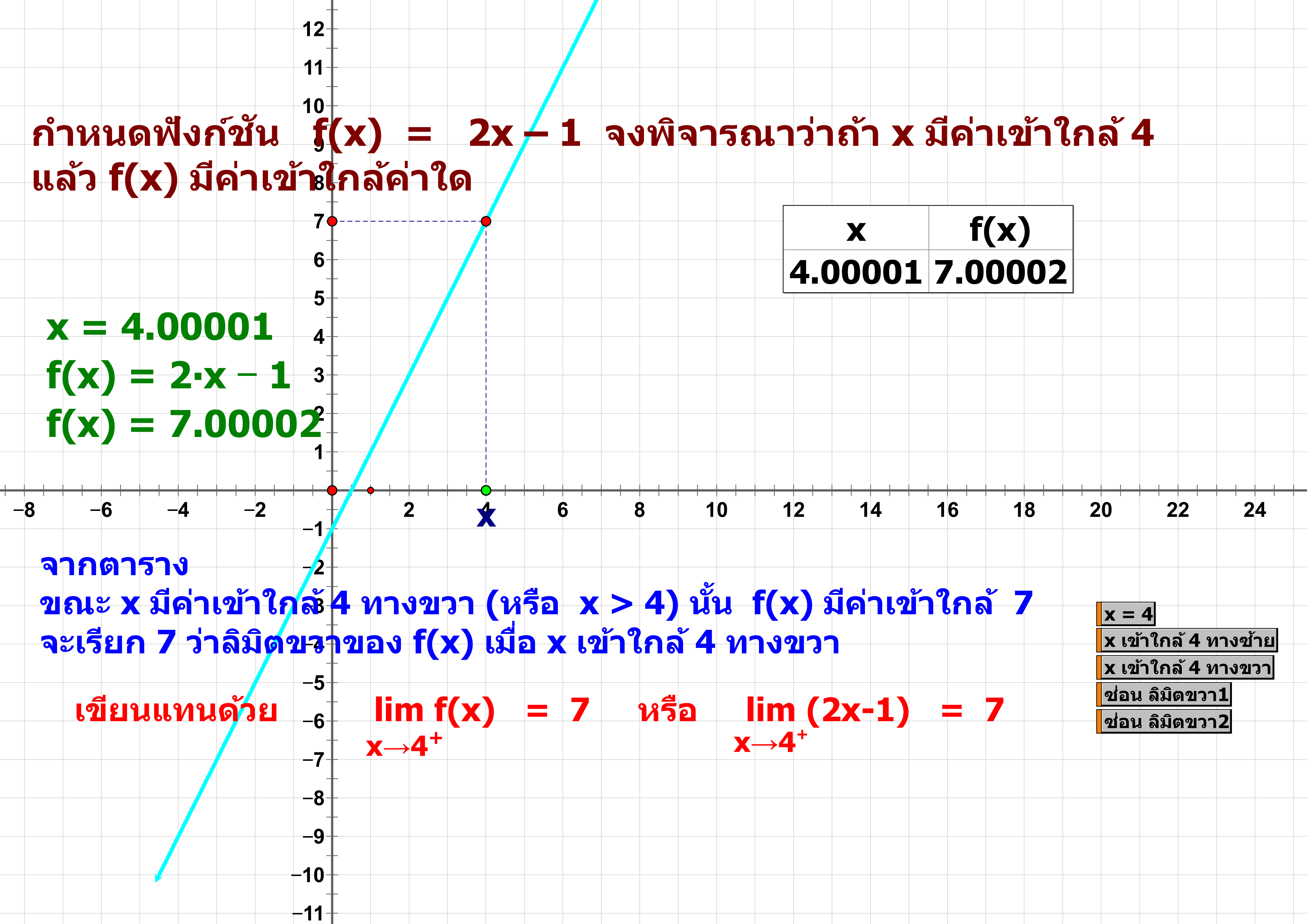
x เข้าใกล้ 4 ทางซ้าย

x เข้าใกล้ 4 ทางขวา

ซ่อน ลิมิตซ้าย1

ซ่อน ลิมิตซ้าย2

กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = 2x - 1$ จงพิจารณาว่าถ้า x มีค่าเข้าใกล้ 4 แล้ว f(x) มีค่าเข้าใกล้ค่าใด



x	f(x)
4.00001	7.00002

$x = 4.00001$

$f(x) = 2 \cdot x - 1$

$f(x) = 7.00002$

จากตาราง

ขณะ x มีค่าเข้าใกล้ 4 ทางขวา (หรือ $x > 4$) นั้น f(x) มีค่าเข้าใกล้ 7

จะเรียก 7 ว่าลิมิตขวาของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ 4 ทางขวา

เขียนแทนด้วย $\lim_{x \to 4^+} f(x) = 7$ หรือ $\lim_{x \to 4^+} (2x-1) = 7$

x = 4

x เข้าใกล้ 4 ทางซ้าย

x เข้าใกล้ 4 ทางขวา

ซ่อน ลิมิตขวา1

ซ่อน ลิมิตขวา2

จากที่กล่าวมาจะเห็นว่า $\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^+} f(x) = 7$

นั่นคือ ขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ 4 ไม่ว่าจะเข้าใกล้ทางซ้ายหรือขวาก็ตาม f(x) จะมีค่าเข้าใกล้ 7

เรียก 7 ว่า ลิมิตของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ 4 หรือฟังก์ชัน f มีลิมิตเป็น 7 ที่จุด x = 4

เขียนแทนด้วย $\lim_{x \to 4} f(x) = 7$ หรือ $\lim_{x \to 4} (2x-1) = 7$

$\lim_{x \to a} f(x)$ หาค่าได้เมื่อ $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$

นั่นคือ ถ้า $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ และ $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

แล้วจะได้ว่า $\lim_{x \to a} f(x) = L$ เมื่อ L เป็นจำนวนจริงใด ๆ

หรือกล่าวได้ว่า ฟังก์ชัน f มีลิมิตเท่ากับ L ที่จุด $x = a$

แต่ถ้า $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$ แล้ว $\lim_{x \to a} f(x)$ หาค่าไม่ได้

หรือกล่าวได้อีกอย่างหนึ่งว่า ฟังก์ชัน f ไม่มีลิมิต ที่จุด $x = a$

บทนิยาม

ให้ f เป็นฟังก์ชั่นค่าจริง a และ L เป็นจำนวนจริง

L จะเป็นลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a สำหรับทุกจำนวนจริง $\varepsilon > 0$

จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง ถ้า $x \in D_f$ และ $0 < |x-a| < \delta$ แล้ว $|f(x) - L| < \varepsilon$

จะใช้สัญลักษณ์ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ แทนลิมิตของ f เมื่อ x เข้าใกล้ a เท่ากับ L