ลิมิตข้างเดียว (One sided Limits)

$x = -0.00100$ $x = 0.00100$

$f(x) = x + 1$ $f(x) = x + 2$

$f(x) = 0.99900$ $f(x) = 2.00100$

กำหนด $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{เมื่อ } x < 0 \\ x+2 & \text{เมื่อ } x > 0 \end{cases}$

พิจารณาค่าของ f(x) เมื่อ $x \to 0$ จากตารางต่อไปนี้

$x < 0$

x	f(x)
−2.00000	−1.00000
−1.00000	0.00000
−0.50000	0.50000
−0.10000	0.90000
−0.01000	0.99000
−0.00100	0.99900

$x > 0$

x	f(x)
2.00000	4.00000
1.00000	3.00000
0.50000	2.50000
0.10000	2.10000
0.01000	2.01000
0.00100	2.00100

ซ่อน ฟังก์ชัน

ซ่อน ข้อความ

ซ่อน ค่า x

ซ่อน ตาราง1

ซ่อน ตาราง2

ซ่อน ข้อสังเกต

เลื่อนแบบร่าง

จะเห็นว่า ถ้า x เข้าใกล้ 0 ในขณะที่ $x < 0$ แล้ว f(x) จะเข้าใกล้ 1
และ ถ้า x เข้าใกล้ 0 ในขณะที่ $x > 0$ แล้ว f(x) จะเข้าใกล้ 2

กรณีเช่นนี้ เรากล่าวว่า lim f(x) หาค่าไม่ได้ หรือไม่มีลิมิต

แต่ถ้าเราพิจารณาเฉพาะที่ $x < 0$ หรือ $x > 0$ จะพบว่า

ถ้า x เข้าใกล้ 0 ในขณะที่ $x < 0$ แล้ว f(x) จะเข้าใกล้ 1
เรากล่าวว่า ลิมิตของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางซ้าย เท่ากับ 1
เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$

ถ้า x เข้าใกล้ 0 ในขณะที่ $x > 0$ แล้ว f(x) จะเข้าใกล้ 2
เรากล่าวว่า ลิมิตของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางซ้าย เท่ากับ 1
เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$

ซ่อน สรุปลิมิตข้างเดียว1

ซ่อน สรุปลิมิตข้างเดียว2

ซ่อน สรุปลิมิตข้างเดียว3

ซ่อน สรุปลิมิตข้างเดียว4

เลื่อนแบบร่างขึ้นบน

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$

พิจารณากราฟต่อไปนี้

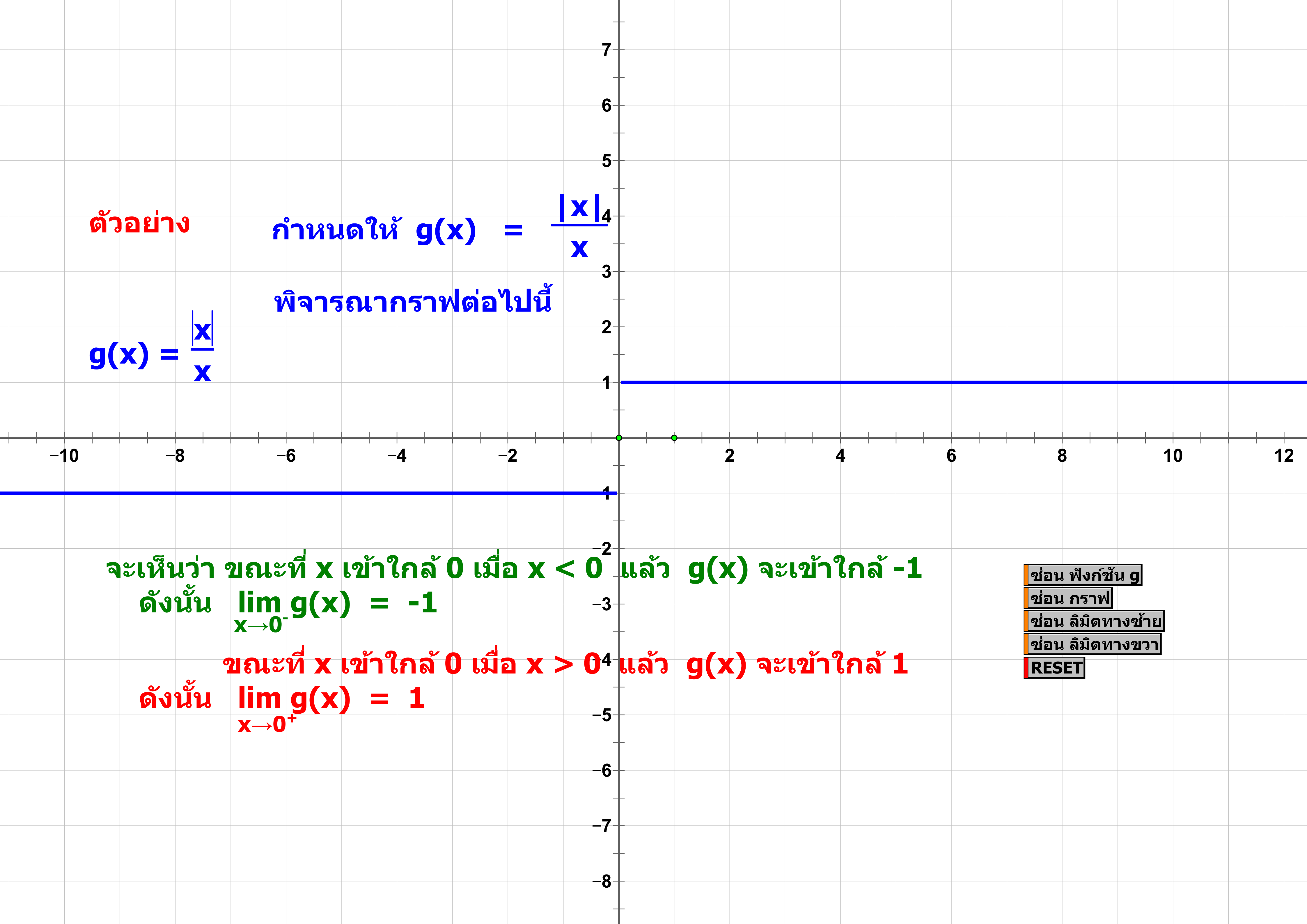
$g(x) = \dfrac{|x|}{x}$

จะเห็นว่า ขณะที่ x เข้าใกล้ 0 เมื่อ $x < 0$ แล้ว g(x) จะเข้าใกล้ -1

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = -1$

ขณะที่ x เข้าใกล้ 0 เมื่อ $x > 0$ แล้ว g(x) จะเข้าใกล้ 1

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 1$



ลิมิตข้างเดียว (One sided Limits)

ทฤษฎีบท ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง และ a, L เป็นจำนวนจริง

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{เมื่อ } x < 2 \\ \frac{x}{2} & \text{เมื่อ } x > 2 \end{cases}$

จงหา $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim_{x\to 2} f(x)$

วิธีทำ

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (3-x) = 3-2 = 1$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2}{2} = 1$$

จะเห็นว่า $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$

ดังนั้น $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$

ซ่อน เข้าใกล้ 2 ทางซ้าย1
ซ่อน เข้าใกล้ 2 ทางซ้าย2
ซ่อน เข้าใกล้ 2 ทางซ้าย3
ซ่อน เข้าใกล้ 2 ทางซ้าย4

ซ่อน เข้าใกล้ 2 ทางขวา1
ซ่อน เข้าใกล้ 2 ทางขวา2
ซ่อน เข้าใกล้ 2 ทางขวา3
ซ่อน เข้าใกล้ 2 ทางขวา4

ซ่อน ลิมิตเข้าใกล้ 2
ซ่อน ค่าลิมิต

เลื่อนแบบร่าง-แสดงกราฟ

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{เมื่อ } x < 2 \\ x & \text{เมื่อ } x = 2 \\ 2x & \text{เมื่อ } 2 < x < 5 \\ x+3 & \text{เมื่อ } x \geq 5 \end{cases}$

จงหา $\lim_{x\to -1} f(x)$, $\lim_{x\to 2} f(x)$, $\lim_{x\to 5} f(x)$

วิธีทำ 1 เนื่องจากเมื่อ $x = -1$ กำหนด $f(x) = x^2$

ดังนั้น $\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} x^2 = (-1)^2 = 1$

ซ่อน วิธีทำ1
ซ่อน วิธีทำ2
ซ่อน วิธีทำ3
ซ่อน วิธีทำ4
ซ่อน วิธีทำ5
RESET
เลื่อนแบบร่าง

วิธีทำ 2 เนื่องจาก $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 = 2^2 = 4$

และ $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (2x) = 2\cdot 2 = 4$

จะเห็นว่า $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 4$

ดังนั้น $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$

ซ่อน วิธีทำ1
ซ่อน วิธีทำ2
ซ่อน วิธีทำ3
ซ่อน วิธีทำ4
RESET
เลื่อนแบบร่าง

วิธีทำ 3 เนื่องจาก $\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-} (2x) = 2\cdot 5 = 10$

และ $\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+} (x+3) = 5+3 = 8$

จะเห็นว่า $\lim_{x\to 5^-} f(x) \neq \lim_{x\to 5^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim_{x\to 5} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ซ่อน วิธีทำ1
ซ่อน วิธีทำ2
ซ่อน วิธีทำ3
ซ่อน วิธีทำ4
RESET

เลื่อนแบบร่าง-ขึ้นบน

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{เมื่อ } x < 2 \\ x & \text{เมื่อ } x = 2 \\ 2x & \text{เมื่อ } 2 < x < 5 \\ x+3 & \text{เมื่อ } x \geq 5 \end{cases}$

จงหา $\lim_{x\to -1} f(x)$, $\lim_{x\to 2} f(x)$, $\lim_{x\to 5} f(x)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 = 2^2 = 4$

และ $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (2x) = 2\cdot 2 = 4$

จะเห็นว่า $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 4$

ดังนั้น $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$

ซ่อน วิธีทำ1

ซ่อน วิธีทำ2

ซ่อน วิธีทำ3

ซ่อน วิธีทำ4

RESET

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{เมื่อ } x < 2 \\ x & \text{เมื่อ } x = 2 \\ 2x & \text{เมื่อ } 2 < x < 5 \\ x+3 & \text{เมื่อ } x \geq 5 \end{cases}$

จงหา $\lim_{x \to -1} f(x)$, $\lim_{x \to 2} f(x)$, $\lim_{x \to 5} f(x)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^-} (2x) = 2 \cdot 5 = 10$

และ $\lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5^+} (x+3) = 5+3 = 8$

จะเห็นว่า $\lim_{x \to 5^-} f(x) \neq \lim_{x \to 5^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim_{x \to 5} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ซ่อน วิธีทำ1
ซ่อน วิธีทำ2
ซ่อน วิธีทำ3
ซ่อน วิธีทำ4
RESET

แบบฝึกหัดลิมิตข้างเดียว

1. กำหนด $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{เมื่อ } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{เมื่อ } 1 \le x < 2 \\ 2 & \text{เมื่อ } x > 2 \end{cases}$ จงหา $\lim_{x\to 1} f(x)$, $\lim_{x\to 2} f(x)$, $\lim_{x\to 3} f(x)$

2. กำหนด $f(x) = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } -1 \le x < 0 \text{ หรือ } 0 < x \le 1 \\ 1 & \text{เมื่อ } x = 0 \\ 2 & \text{เมื่อ } x < -1 \text{ หรือ } x > 1 \end{cases}$

จงหา $\lim_{x\to -3} f(x)$, $\lim_{x\to -1} f(x)$, $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to 1} f(x)$, $\lim_{x\to 3} f(x)$