ลิมิตอนันต์ (Infinite Limits)

พิจารณา $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ซึ่งหมายความว่า ถ้า x มีค่าเข้าใกล้ a ซึ่งเป็นค่าจำกัด

แล้ว f(x) จะมีค่าเข้าใกล้ L ซึ่งเป็นค่าจำกัดเช่นกัน

อาจเขียนแทนด้วย ถ้า $x \to a$ แล้ว $f(x) \to L$

ในกรณีที่ x และ f(x) มีค่าเปลี่ยนแปลงไปอย่างไม่มีขอบเขต
ซึ่งกล่าวว่า x เข้าสู่อนันต์ หรือ f(x) เข้าสู่อนันต์ ซึ่งแบ่งเป็นกรณีต่าง ๆ ดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้า x เข้าสู่บวกอนันต์ แล้ว f(x) เข้าสู่จำนวนจำกัด L

ซ่อน ข้อความ
ซ่อน ข้อความ
ซ่อน ข้อความ

x เข้าสู่บวกอนันต์ หมายความว่า x มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขต
เขียนแทนด้วย $x \to \infty$

ให้ $f(x) = \frac{1}{x}$ พิจารณาค่า x และ f(x) จากตารางต่อไปนี้

$f(x) = \frac{1}{x}$

x = 100000
f(x) = 0.00001

x	f(x)
1	1.00000
2	0.50000
4	0.25000
10	0.10000
100	0.01000
1000	0.00100
10000	0.00010
100000	0.00001
100000	0.00001

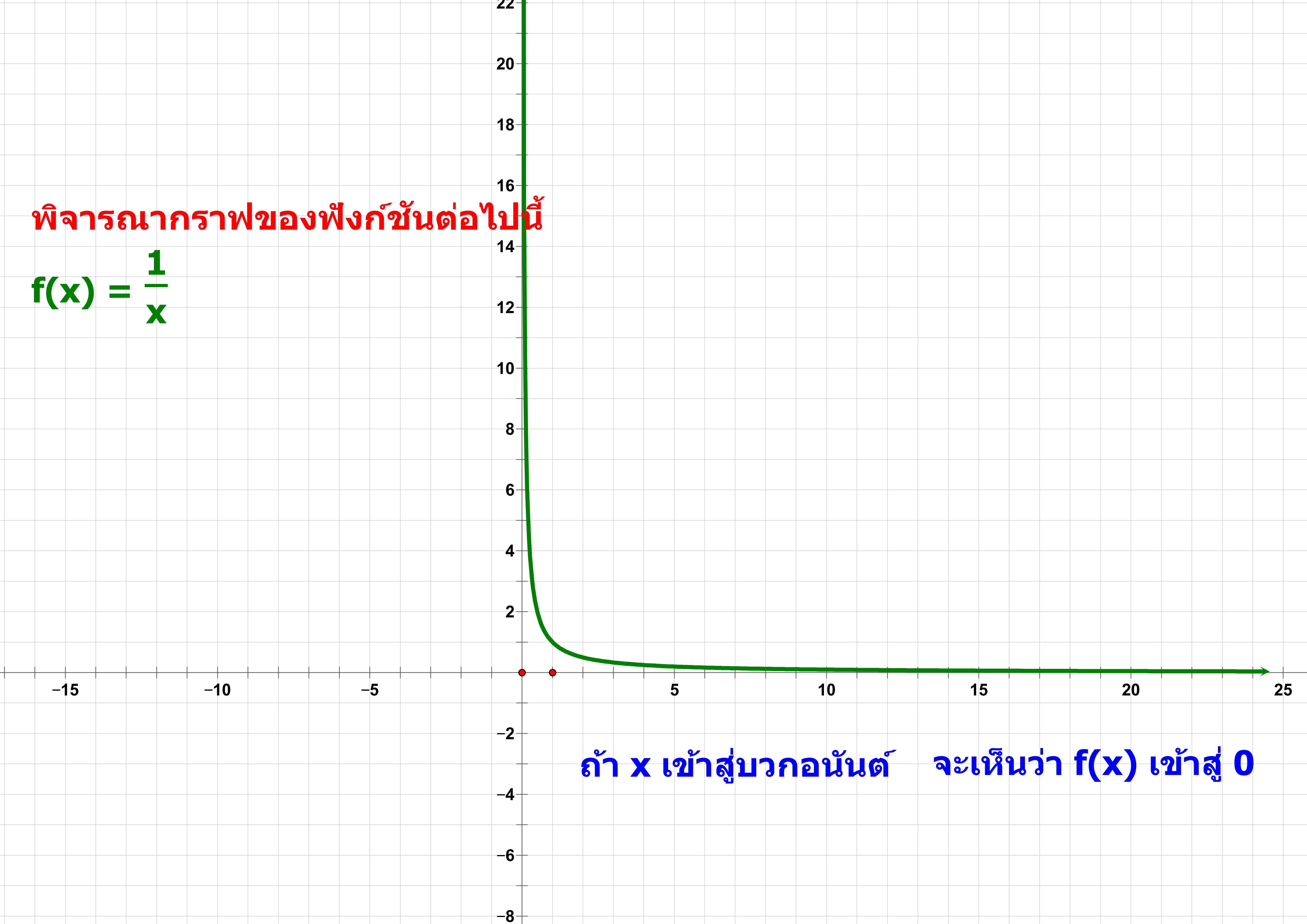
ซ่อน ข้อความ
ซ่อน ฟังก์ชัน f
ซ่อน ค่า
ซ่อน ตาราง

จะเห็นว่า ถ้า x มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขต แล้ว f(x) จะมีค่าเข้าใกล้ 0

กล่าวได้ว่า ถ้า $x \to \infty$ แล้ว $f(x) \to 0$ เขียนแทนด้วย $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

บทนิยาม ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง L เป็นจำนวนจริง
f(x) มีลิมิตเข้าสู่ L เมื่อ x เข้าสู่บวกอนันต์ ก็ต่อเมื่อ
กำหนดจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $M > 0$ ซึ่งทำให้
ถ้า $x > M$ แล้ว $|f(x)-L| < \varepsilon$ เขียนแทนด้วย $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

ซ่อน ข้อความ
ซ่อน ข้อความ
ซ่อน ข้อความ



พิจารณากราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้
$f(x) = \frac{1}{x}$
ถ้า x เข้าสู่บวกอนันต์ จะเห็นว่า f(x) เข้าสู่ 0

กรณีที่ 2 ถ้า x เข้าสู่ลบอนันต์ แล้ว f(x) เข้าสู่จำนวนจำกัด L

x เข้าสู่ลบอนันต์ หมายความว่า x มีค่าลดลงอย่างไม่มีขอบเขต
เขียนแทนด้วย $x \to -\infty$

ให้ $f(x) = \frac{1}{x}$ พิจารณาค่า x และ f(x) จากตารางต่อไปนี้

$x = -100000$

$f(x) = \frac{1}{x}$

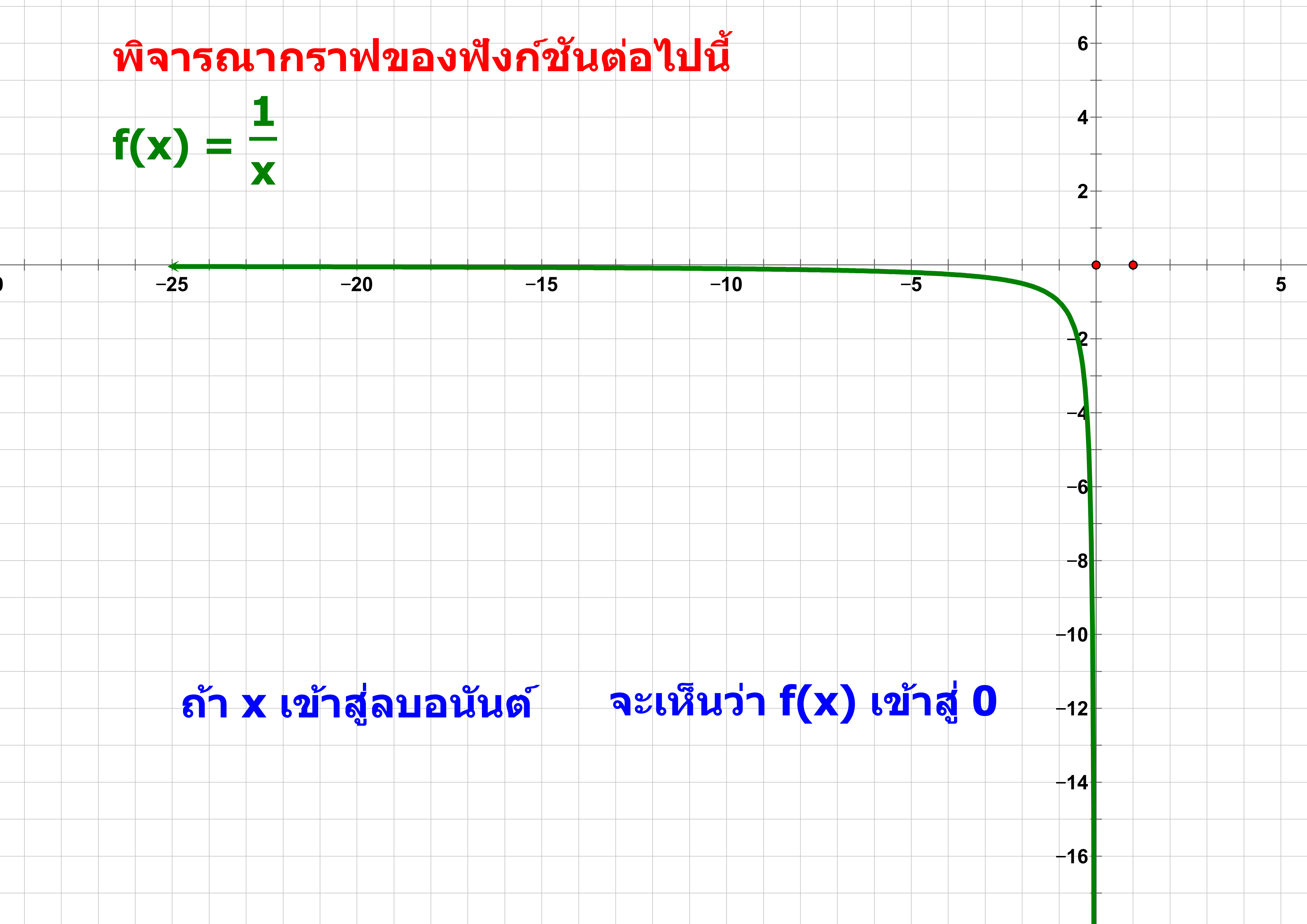
$f(x) = -0.00001$

x	f(x)
−1	−1.00000
−2	−0.50000
−10	−0.10000
−100	−0.01000
−1000	−0.00100
−10000	−0.00010
−100000	−0.00001
−100000	−0.00001

จะเห็นว่า ถ้า x มีค่าลดลงอย่างไม่มีขอบเขต แล้ว f(x) จะมีค่าเข้าใกล้ 0

กล่าวได้ว่า ถ้า $x \to -\infty$ แล้ว $f(x) \to 0$ เขียนแทนด้วย $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

บทนิยาม ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง L เป็นจำนวนจริง
f(x) มีลิมิตเข้าสู่ L เมื่อ x เข้าสู่ลบอนันต์ ก็ต่อเมื่อ
กำหนดจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $M > 0$ ซึ่งทำให้
ถ้า $x < -M$ แล้ว $|f(x)-L| < \varepsilon$ เขียนแทนด้วย $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$


พิจารณากราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้
$f(x) = \frac{1}{x}$
ถ้า x เข้าสู่ลบอนันต์
จะเห็นว่า f(x) เข้าสู่ 0
6
4
2
−2
−4
−6
−8
−10
−12
−14
−16
−25
−20
−15
−10
−5
5

กรณีที่ 3 ถ้า x เข้าจำนวนจำกัด แล้ว f(x) เข้าสู่บวกอนันต์

เขียนแทนด้วย ถ้า $x \to a$ แล้ว $f(x) \to \infty$

ให้ $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$ พิจารณาค่า x และ f(x) จากตารางต่อไปนี้

$f(x) = \dfrac{1}{|x|}$

x = $\boxed{0.00001}$

f(x) = 100000.00000

x = 0.0000

f(x) = 100000.00

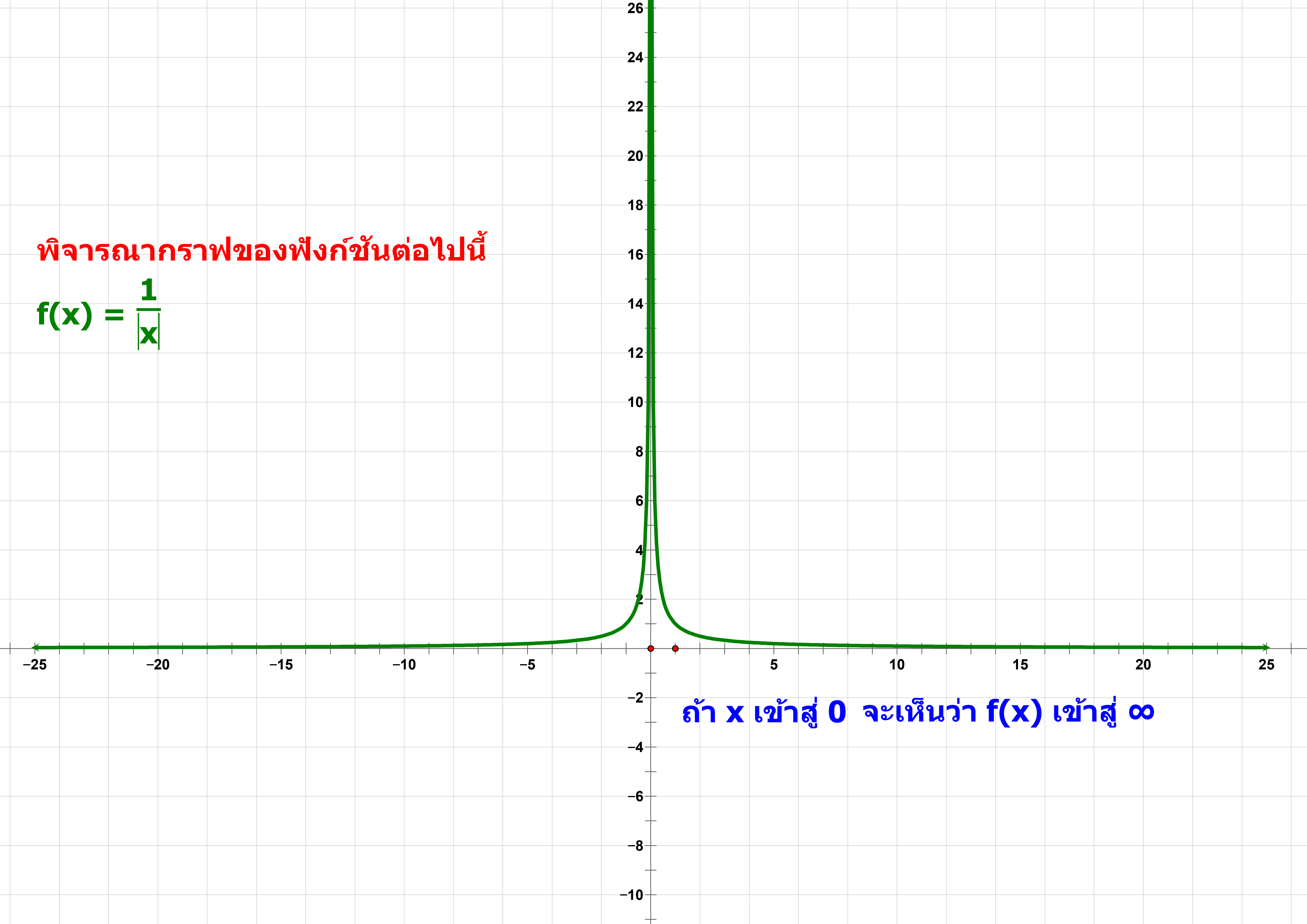
x > 0		x < 0	
x	f(x)	x	f(x)
10.00000	0.10000	−10.0000	0.10
1.00000	1.00000	−1.0000	1.00
0.10000	10.00000	−0.1000	10.00
0.01000	100.00000	−0.0100	100.00
0.00100	1000.00000	−0.0010	1000.00
0.00010	10000.00000	−0.0001	10000.00
0.00001	100000.00000	0.0000	100000.00
↓ 0	↓ ∞	↓ 0	↓ ∞

จะเห็นว่า ถ้า $x \to 0$ แล้ว $f(x) \to \infty$ เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{|x|} = \infty$

บทนิยาม ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง a เป็นจำนวนจริง
f(x) มีลิมิตเข้าสู่บวกอนันต์ เมื่อ x เข้าสู่ a ก็ต่อเมื่อ
ถ้ากำหนดจำนวนจริง $M > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้
ถ้า $0 < |x-a| < \delta$ แล้ว $f(x) > M$ เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

พิจารณากราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$f(x) = \frac{1}{|x|}$$



ถ้า x เข้าสู่ 0 จะเห็นว่า f(x) เข้าสู่ ∞

กรณีที่ 4 **ถ้า x เข้าจำนวนจำกัด แล้ว f(x) เข้าสู่ลบอนันต์**

เขียนแทนด้วย ถ้า $x \to a$ แล้ว $f(x) \to -\infty$

ให้ $f(x) = -\frac{1}{|x|}$ พิจารณาค่า x และ f(x) จากตารางต่อไปนี้

$f(x) = -\left(\frac{1}{|x|}\right)$

x = 0.00001

f(x) = –100000.00000

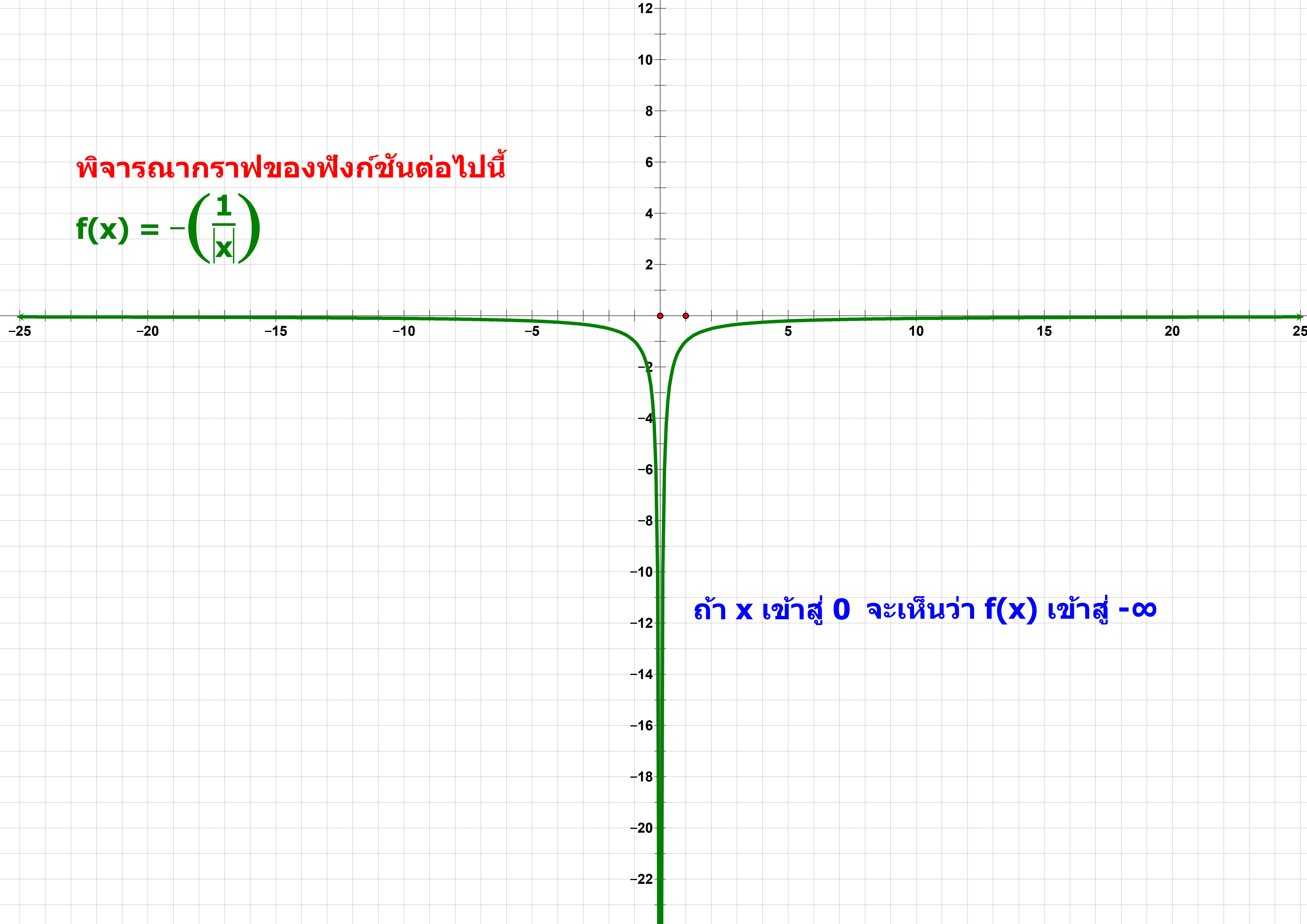
x = 0.0000

f(x) = –100000.00

x > 0		x < 0	
x	f(x)	x	f(x)
10.00000	–0.10000	–10.0000	–0.10
1.00000	–1.00000	–1.0000	–1.00
0.10000	–10.00000	–0.1000	–10.00
0.01000	–100.00000	–0.0100	–100.00
0.00100	–1000.00000	–0.0010	–1000.00
0.00010	–10000.00000	–0.0001	–10000.00
0.00001	–100000.00000	0.0000	–100000.00
↓ 0	↓ $-\infty$	↓ 0	↓ $-\infty$

จะเห็นว่า ถ้า $x \to 0$ แล้ว $f(x) \to -\infty$ เขียนแทนด้วย $\lim_{x\to 0} -\frac{1}{|x|} = -\infty$

บทนิยาม ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง a เป็นจำนวนจริง
f(x) มีลิมิตเข้าสู่ลบอนันต์ เมื่อ x เข้าสู่ a ก็ต่อเมื่อ
ถ้ากำหนดจำนวนจริง $M > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้
ถ้า $0 < |x-a| < \delta$ แล้ว $f(x) < -M$ เขียนแทนด้วย $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$


พิจารณากราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้
$f(x) = -\left(\frac{1}{|x|}\right)$
ถ้า x เข้าสู่ 0 จะเห็นว่า f(x) เข้าสู่ -∞

กรณีที่ 5 ถ้า x เข้าสู่บวกอนันต์ หรือลบอนันต์ แล้ว f(x) เข้าสู่บวกอนันต์ หรือลบอนันต์ อาจมีกรณีต่าง ๆ ได้ดังนี้

1. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

บทนิยาม ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง f(x) จะเป็นลิมิตเข้าสู่บวกอนันต์ เมื่อ x เข้าสู่บวกอนันต์ ก็ต่อเมื่อ ถ้ากำหนดจำนวนจริง $M > 0$ จะมีจำนวนจริง $N > 0$ ซึ่งถ้า $x > N$ แล้ว $f(x) > M$ เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

บทนิยาม ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง a เป็นจำนวนจริง f(x) มีลิมิตเข้าสู่ลบอนันต์ เมื่อ x เข้าสู่ a ก็ต่อเมื่อ ถ้ากำหนดจำนวนจริง $M > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ ถ้า $0 < |x-a| < \delta$ แล้ว $f(x) < -M$ เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$

ลิมิตอนันต์ (Infinite Limits)

บทนิยาม กำหนดให้ $D \subset R$, a เป็นจุดสะสมของ D และ $f : D \to R$

1. จะกล่าวว่า f มีลิมิตอนันต์ $(+\infty)$ ที่ a ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละ $M > 0$ จะมี $\delta > 0$ โดยที่ $f(x) > M$ สำหรับทุก ๆ $x \in D$ โดยที่ $0 < |x-a| < \delta$
เขียนแทนด้วย $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$

2. จะกล่าวว่า f มีลิมิตลบอนันต์ $(-\infty)$ ที่ a ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละ $M > 0$ จะมี $\delta > 0$ โดยที่ $f(x) < -M$ สำหรับทุก ๆ $x \in D$ โดยที่ $0 < |x-a| < \delta$
เขียนแทนด้วย $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

ซ่อน บทนิยาม1
ซ่อน บทนิยาม2
ซ่อน บทนิยาม3

ทฤษฎีบท

1. $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

2. $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

ซ่อน กรณี f(x) = 1/x (1)

ซ่อน กรณี f(x) = 1/x (2)

ถ้า $r \in Q^{+}$ จะได้ว่า

1. $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^{r}} = 0$

2. $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^{r}} = 0$

ซ่อน กรณี f(x) = 1/x^r (1)

ซ่อน กรณี f(x) = 1/x^r (2)

ซ่อน กรณี f(x) = 1/x^r (3)

จากทฤษฎีลิมิต เราจะสามารถหาค่าลิมิตอนันต์ได้ ถ้าเราสามารถทำให้แต่ละพจน์ ใน $f(x)$ มีเฉพาะค่าคงตัว หรือเป็นเศษส่วนที่มีส่วนเป็น x^r เมื่อ $r \in Q^+$ โดยนำเทอม x^r ที่ r มีค่าสูงสุดมาหารทั้งเศษและส่วน

กรณีดีกรีสูงสุดของเศษเท่ากับดีกรีสูงสุดของส่วน

นำ x^2 มาหารทั้งเศษและส่วน

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2 + 4x - 3}{3x^2 + 8} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{5x^2 + 4x - 3}{x^2}}{\dfrac{3x^2 + 8}{x^2}}$$

ซ่อน แนวคิด x^r ที่เหมาะสม

ซ่อน วิธีทำ1

ซ่อน วิธีทำ2

ซ่อน วิธีทำ3

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{5x^2}{x^2} + \dfrac{4x}{x^2} - \dfrac{3}{x^2}}{\dfrac{3x^2}{x^2} + \dfrac{8}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5 + \dfrac{4}{x} - \dfrac{3}{x^2}}{3 + \dfrac{8}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \left(5 + \dfrac{4}{x} - \dfrac{3}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty} \left(3 + \dfrac{8}{x^2}\right)}$$

ซ่อน วิธีทำ4

ซ่อน วิธีทำ5

ซ่อน วิธีทำ6

ซ่อน วิธีทำ7

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 5 + \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4}{x} - \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty} 3 + \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8}{x^2}}$$

$$= \frac{5 + 0 - 0}{3 + 0} = \frac{5}{3}$$

กรณีดีกรีสูงสุดของเศษน้อยกว่าดีกรีสูงสุดของส่วน

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8+x}{3x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{8+x}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}}$$

นำ x^2 มาหารทั้งเศษและส่วน

ซ่อน แนวคิด x^r ที่เหมาะสม

ซ่อน วิธีทำ1

ซ่อน วิธีทำ2

ซ่อน วิธีทำ3

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{8}{x^2} + \frac{x}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{8}{x^2} + \frac{1}{x}}{3}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} \left(\frac{8}{x^2} + \frac{1}{x}\right)}{\lim_{x\to\infty} 3}$$

ซ่อน วิธีทำ4

ซ่อน วิธีทำ5

ซ่อน วิธีทำ6

ซ่อน วิธีทำ7

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} \frac{8}{x^2} + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}}{\lim_{x\to\infty} 3}$$

$$= \frac{0+0}{3} = 0$$

กรณีดีกรีสูงสุดของเศษมากกว่าดีกรีสูงสุดของส่วน

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-10x^4}{4x^3-5x+7} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x-10x^4}{x^4}}{\frac{4x^3-5x+7}{x^4}}$$

ซ่อน แนวคิด x^r ที่เหมาะสม
ซ่อน วิธีทำ1
ซ่อน วิธีทำ2
ซ่อน วิธีทำ3

นำ x^4 มาหารทั้งเศษและส่วน

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x}{x^4}-\frac{10x^4}{x^4}}{\frac{4x^3}{x^4}-\frac{5x}{x^4}+\frac{7}{x^4}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x^3}-10}{\frac{4}{x}-\frac{5}{x^3}+\frac{7}{x^4}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x^3}-10\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4}{x}-\frac{5}{x^3}+\frac{7}{x^4}\right)}$$

ซ่อน วิธีทำ4
ซ่อน วิธีทำ5

$$= \frac{\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^3}-\lim_{x\to\infty}10}{\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}+\lim_{x\to\infty}\frac{7}{x^3}}$$

$$= \frac{0-10}{0-0+0}$$

$$= -\frac{10}{0}$$ (ไม่นิยาม)

ซ่อน วิธีทำ6
ซ่อน วิธีทำ7
ซ่อน การหารด้วย 0
ซ่อน ข้อสรุป

ดังนั้น $\lim_{x\to\infty}\frac{3x-10x^4}{4x^3-5x+7}$ หาค่าไม่ได้ หรือ ไม่มีลิมิต

จากทั้ง 3 กรณีที่กล่าวมา
จะเห็นว่าเราสามารถสังเกตที่ดีกรีสูงสุดของเศษและดีกรีสูงสุดของส่วนได้
โดยมีวิธีพิจารณาดังนี้

กรณีที่ 1 **ดีกรีสูงสุดของเศษเท่ากับดีกรีสูงสุดของส่วน**
จะได้ว่า ลิมิตของฟังก์ชัน เท่ากับ ผลหารของสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีดีกรีสูงสุดของเศษและส่วน

กรณีที่ 2 **ดีกรีสูงสุดของเศษน้อยกว่าดีกรีสูงสุดของส่วน**
จะได้ว่า ลิมิตของฟังก์ชัน เท่ากับ 0

กรณีที่ 3 **ดีกรีสูงสุดของเศษมากกว่าดีกรีสูงสุดของส่วน**
จะได้ว่า ลิมิตของฟังก์ชัน หาค่าไม่ได้ หรือ ไม่มีลิมิต

แบบฝึกหัด จงหาลิมิตของฟังก์ชัน

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x^2}$ = ...0..........

ซ่อน เฉลย1

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{8x^2 - 3}{2x^2 + 3}$ = ...4..........

ซ่อน เฉลย2

3. $\lim_{x\to\infty} \frac{6x + 2}{5 - 9x}$ = $\frac{6}{-9} = -\frac{2}{3}$

ซ่อน เฉลย3

4. $\lim_{x\to\infty} \frac{4x + 12x^2}{2x + 3x^2}$ = ...4..........

ซ่อน เฉลย4

5. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt[3]{x^3+10}}$ = ...2..........

ซ่อน เฉลย5

6. $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2} + 1}$ = ...0..........

ซ่อน เฉลย6

7. $\lim_{x\to\infty} \frac{6x + 5}{5 - 3x}$ = ...-2..........

ซ่อน เฉลย7

8. $\lim_{x\to\infty} \frac{x + 6x^2}{6 - 2x^3}$ = ...0..........

ซ่อน เฉลย8

9. $\lim_{x\to\infty} \frac{4x - x^2}{3 + 4x}$ = ...ไม่มีลิมิต..........

ซ่อน เฉลย9

10. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 3x + 4}{\sqrt{x^4 + 2x + 5}}$ = ...ไม่มีลิมิต..........

ซ่อน เฉลย10