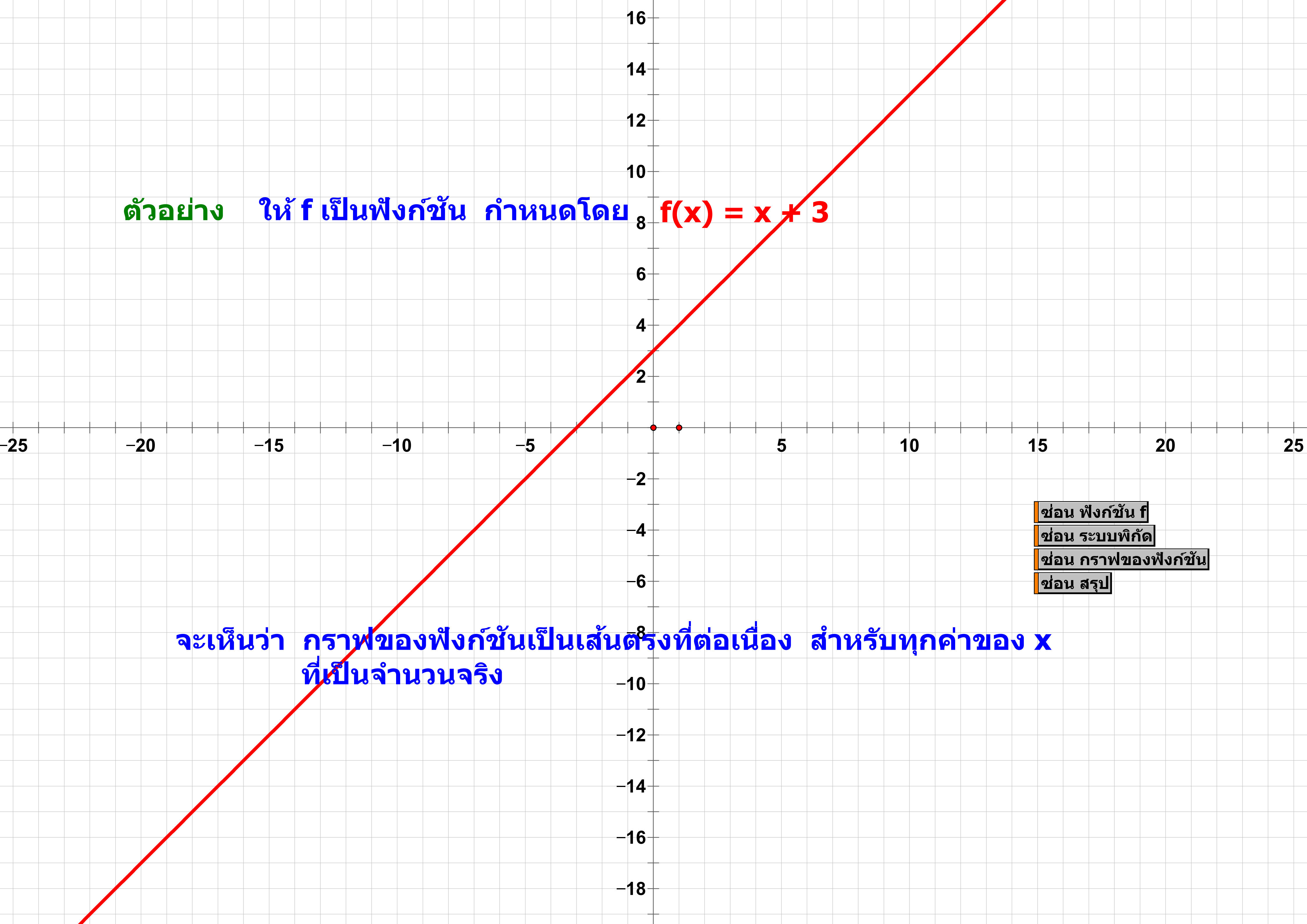
ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (Continuity of Functions)

จากเรื่องลิมิต เราได้ศึกษาลักษณะอย่างหนึ่งของฟังก์ชัน นั่นคือลักษณะของฟังก์ชันที่มีการเปลี่ยนแปลงเข้าสู่ค่าคงตัวหรืออนันต์ ซึ่งแสดงว่าค่าของฟังก์ชันจะถูกบังคับทิศทางด้วยตัวแปรอิสระในโดเมน ลักษณะอีกอย่างหนึ่งของฟังก์ชันที่ต้องการศึกษาเพื่อเป็นพื้นฐานของวิชาแคลคูลัสก็คือ ลักษณะของการขาดตอนของกราฟของฟังก์ชัน ถ้ากราฟของฟังก์ชันเกิดการขาดตอนที่จุดใดจุดหนึ่ง เรากล่าวว่า ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่จุดนั้น เราจำเป็นจะต้องอธิบายเหตุผลในเชิงคณิตศาสตร์ว่า ลักษณะอย่างไรจึงจะเรียกว่าฟังก์ชันต่อเนื่องหรือไม่ต่อเนื่องที่จุดใดจุดหนึ่ง

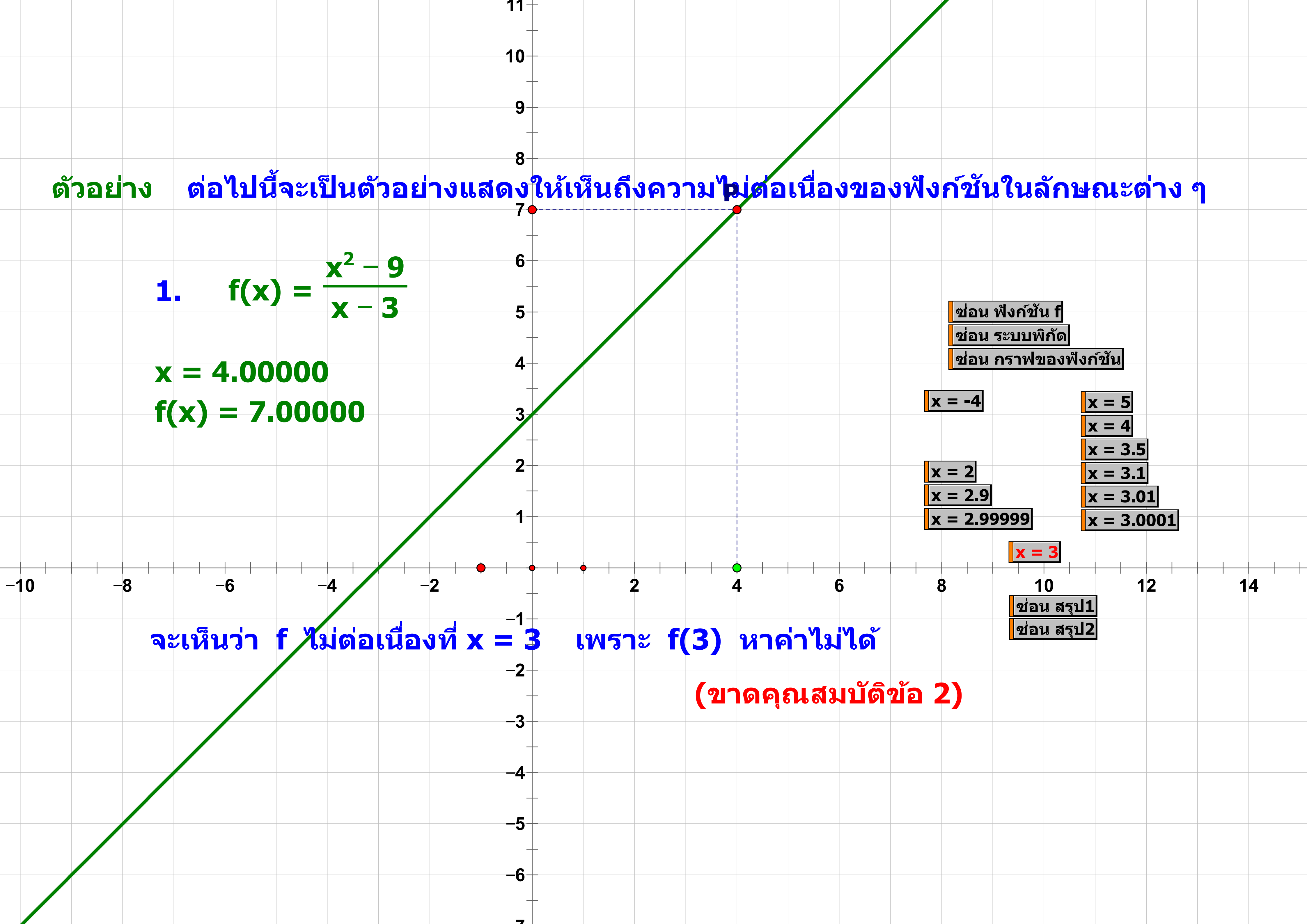
ฟังก์ชัน f จะมีความต่อเนื่องที่จุด $x = a$ เมื่อ

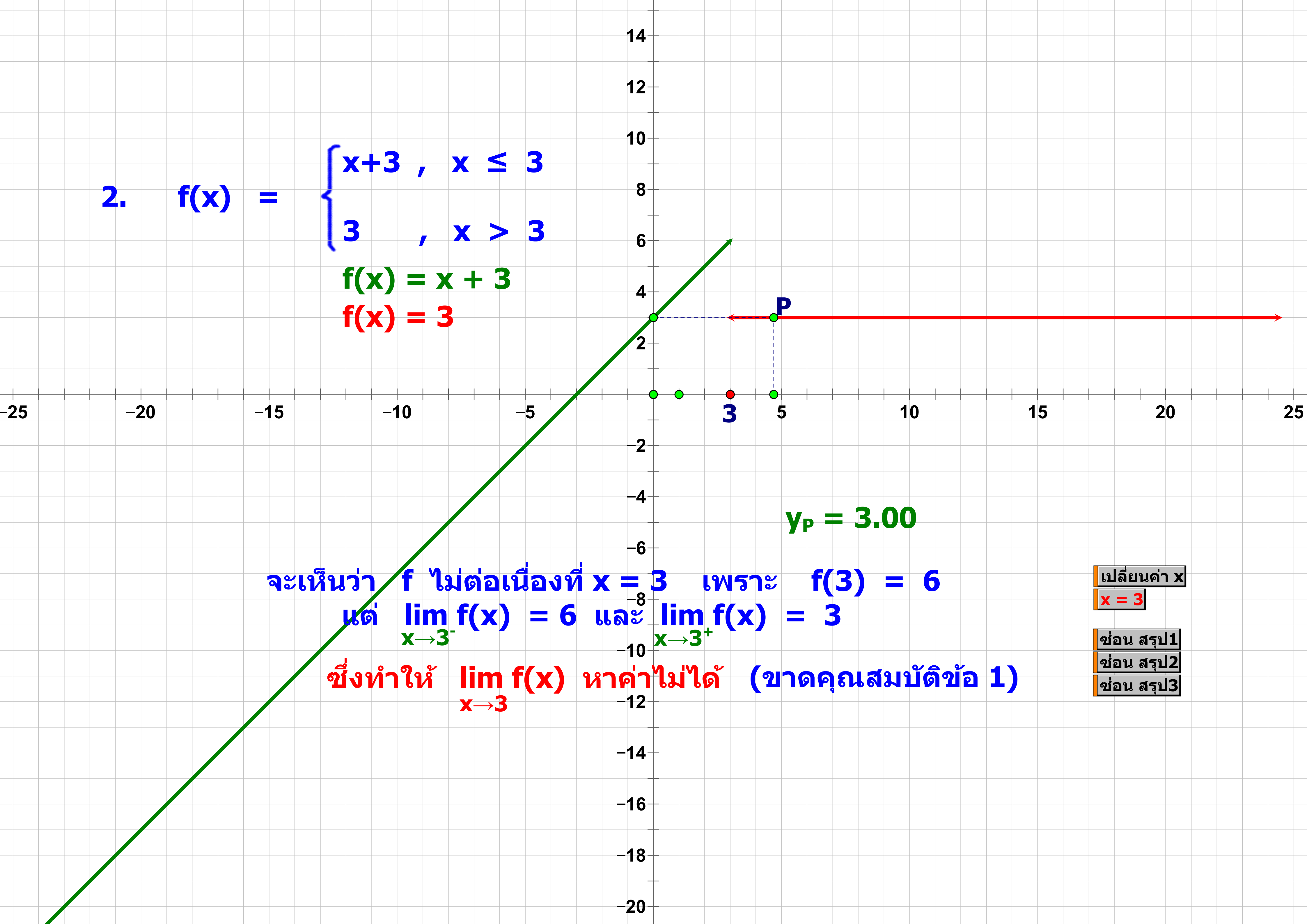
1. $\lim_{x \to a} f(x)$ หาค่าได้
2. $f(a)$ หาค่าได้

และ 3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$



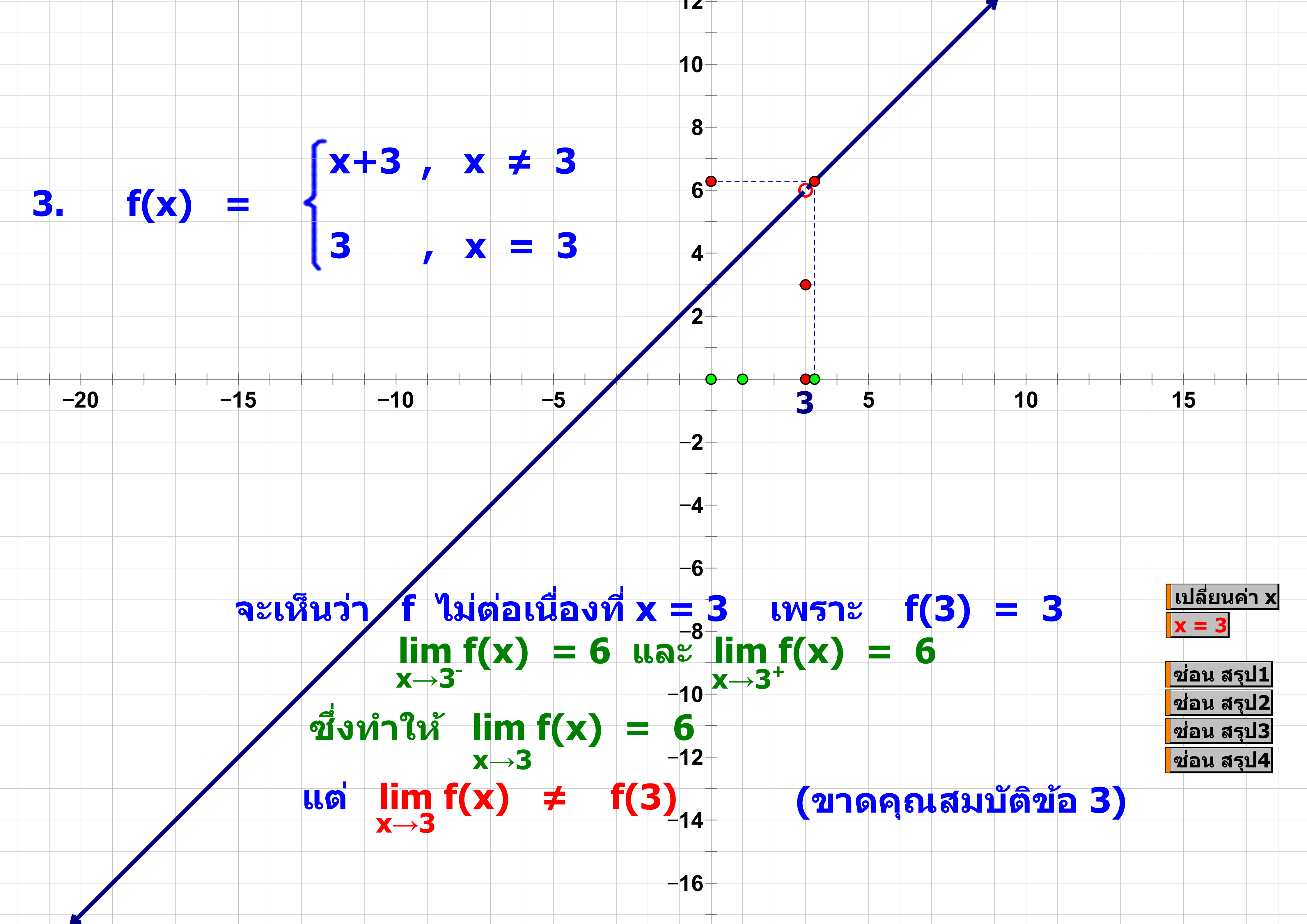
ตัวอย่าง ให้ f เป็นฟังก์ชัน กำหนดโดย f(x) = x + 3
ซ่อน ฟังก์ชัน f
ซ่อน ระบบพิกัด
ซ่อน กราฟของฟังก์ชัน
ซ่อน สรุป
จะเห็นว่า กราฟของฟังก์ชันเป็นเส้นตรงที่ต่อเนื่อง สำหรับทุกค่าของ x ที่เป็นจำนวนจริง


ตัวอย่าง ต่อไปนี้จะเป็นตัวอย่างแสดงให้เห็นถึงความไม่ต่อเนื่องของฟังก์ชันในลักษณะต่าง ๆ
1. $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$
x = 4.00000
f(x) = 7.00000
P
ซ่อน ฟังก์ชัน f
ซ่อน ระบบพิกัด
ซ่อน กราฟของฟังก์ชัน
x = -4
x = 5
x = 4
x = 3.5
x = 2
x = 3.1
x = 2.9
x = 3.01
x = 2.99999
x = 3.0001
x = 3
ซ่อน สรุป1
ซ่อน สรุป2
จะเห็นว่า f ไม่ต่อเนื่องที่ x = 3 เพราะ f(3) หาค่าไม่ได้
(ขาดคุณสมบัติข้อ 2)



2. $f(x) = \begin{cases} x+3 & , \ x \le 3 \\ 3 & , \ x > 3 \end{cases}$
$f(x) = x + 3$
$f(x) = 3$
P
3
$y_P = 3.00$
จะเห็นว่า f ไม่ต่อเนื่องที่ x = 3 เพราะ f(3) = 6
แต่ $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 6$ และ $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 3$
ซึ่งทำให้ $\lim_{x \to 3} f(x)$ หาค่าไม่ได้ (ขาดคุณสมบัติข้อ 1)
เปลี่ยนค่า x
x = 3
ซ่อน สรุป1
ซ่อน สรุป2
ซ่อน สรุป3

3. $f(x) = \begin{cases} x+3 \ , & x \neq 3 \\ 3 \ , & x = 3 \end{cases}$



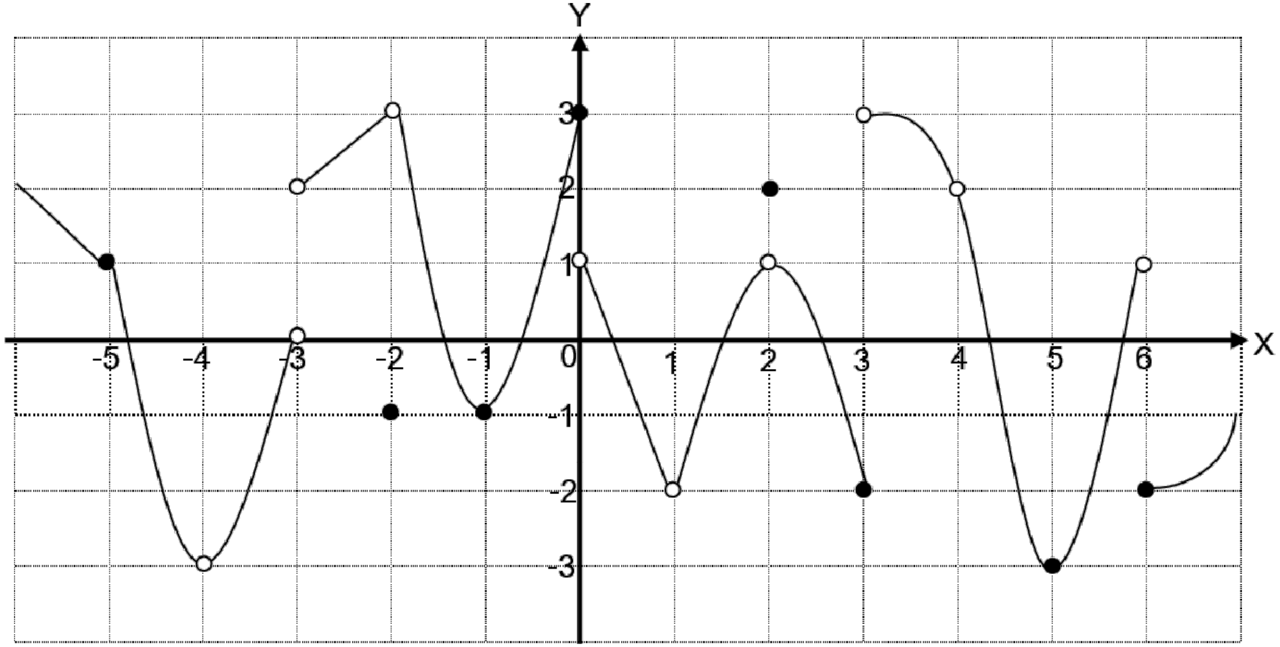
จะเห็นว่า f ไม่ต่อเนื่องที่ x = 3 เพราะ $f(3) = 3$

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 6$ และ $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 6$

ซึ่งทำให้ $\lim_{x\to 3} f(x) = 6$

แต่ $\lim_{x\to 3} f(x) \neq f(3)$ (ขาดคุณสมบัติข้อ 3)

ให้นักศึกษาพิจารณาความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่จุด x = a ต่อไปนี้หรือไม่



ที่จุด x = -5

1. $\lim_{x \to -5} f(x) = 1$

2. $f(-5) = 1$

3. $\lim_{x \to -5} f(x) = f(-5)$

ดังนั้น f มีความต่อเนื่องที่จุด x = -5 (มีสมบัติของความต่อเนื่องครบทุกข้อ)

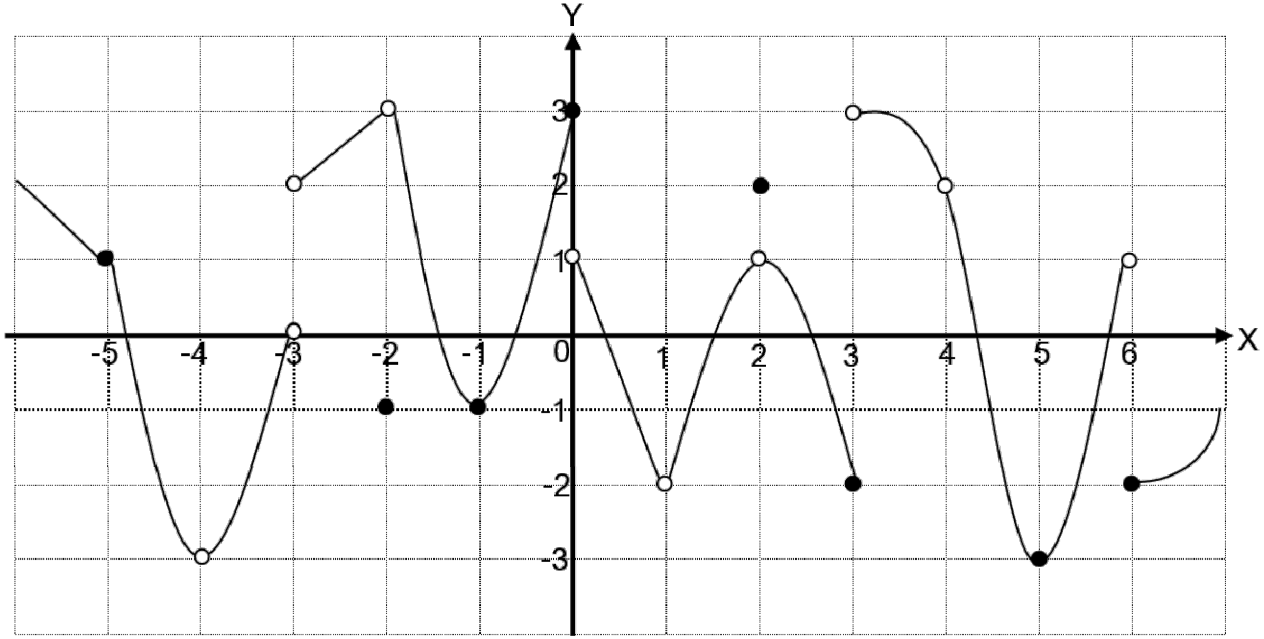
ซ่อน สมบัติข้อ1

ซ่อน สมบัติข้อ2

ซ่อน สมบัติข้อ3

ซ่อน สรุป

ให้นักศึกษาพิจารณาความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่จุด x = a ต่อไปนี้หรือไม่



ที่จุด x = -4

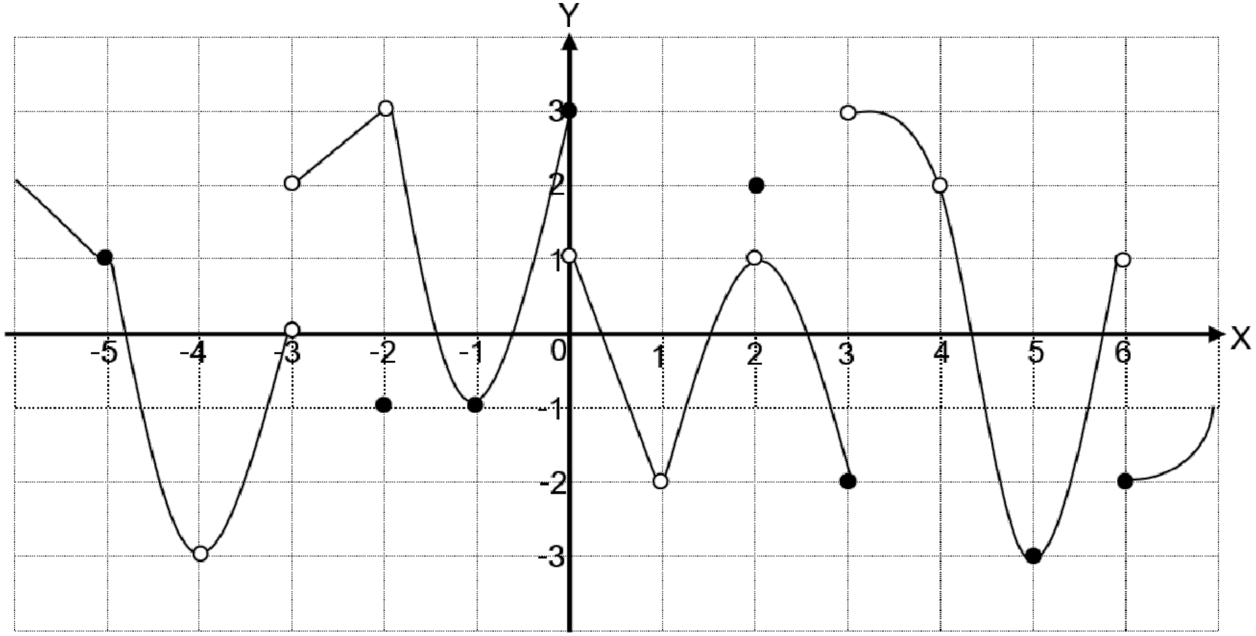
1. $\lim_{x \to -4} f(x) = -3$

2. f(-4) หาค่าไม่ได้ (ไม่มีจุดทึบที่ x = -4)

ดังนั้น f ไม่มีความต่อเนื่องที่จุด x = -4 (ขาดสมบัติของความต่อเนื่องข้อที่ 2)

ซ่อน สมบัติ1
ซ่อน สมบัติ2
ซ่อน สรุป

ให้นักศึกษาพิจารณาความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่จุด x = a ต่อไปนี้หรือไม่



ซ่อน เฉลย1
ซ่อน เฉลย2

ที่จุด x = -3

1. $\lim_{x \to -3} f(x)$ = หาค่าไม่ได้

เพราะ $\lim_{x \to -3^-} f(x) = 0$ แต่ $\lim_{x \to -3^+} f(x) = 2$

ดังนั้น f ไม่มีความต่อเนื่องที่จุด x = -3

(ขาดสมบัติของความต่อเนื่องข้อที่ 1)

ที่จุด x = -2

1. $\lim_{x \to -2} f(x) = 3$

2. $f(-2) = -1$ (มีจุดทึบที่จุด(-2,-1))

3. $\lim_{x \to -2} f(x) \neq f(-2)$

ดังนั้น f ไม่มีความต่อเนื่องที่จุด x = -2

(ขาดสมบัติของความต่อเนื่องข้อที่ 3)