The z-transform
การแปลงแซด

เป้าหมาย

- นศ รู้จักความหมายของการแปลง แซด
- นศ เข้าใจประโยชน์และการนำการแปลงแซด ไปใช้งาน

ทำไมต้องแปลงแซด ?

- เราใช้การแปลง DTFT เพื่อช่วยในการวิเคราะห์สัญญาณไม่ต่อเนื่องทางเวลาโดยใช้ $\{e^{j\omega}\}$
- และยิ่งมีประโยชน์ ในการวิเคราะห์ในเชิงความถี่ $H(e^{j\omega})$
- แต่ DTFT เป็นการแปลงที่ใช้กับสัญญาณ steady–state (เช่น cos และ sin) แต่ใช้กับสัญญาณที่สำคัญบางอย่างไม่ได้ เช่น u(n) หรือ nu(n)
- การแปลงแซด (Z-transform) ให้คำตอบได้

การแปลงแซด (z-Transform)

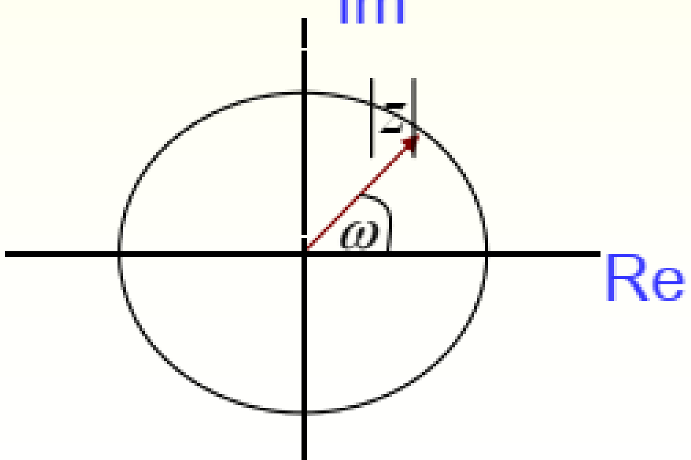
- สำหรับ สัญญาณ x(n) จะมีการแปลงแซดเป็น

$$X(z) \triangleq Z[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

- z หมายถึง “ตัวแปรเชิงซ้อน” ซึ่งเราจะให้เป็น

$$z = |z| e^{j\omega}$$

- ซึ่งมีความหมายถึง “ขนาด” และ “เฟส”
-



การแปลงแซด (z-transform) (ต่อ)

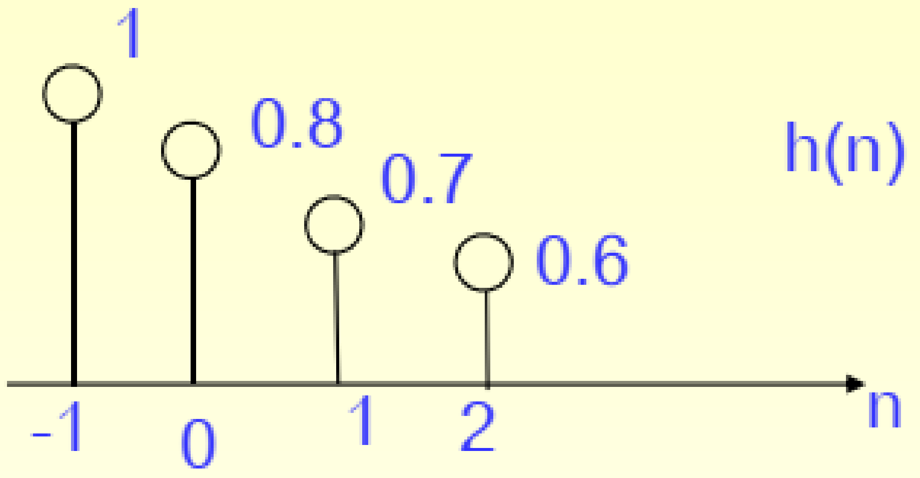
หาก “ขนาด” มีค่า เท่า หนึ่ง ($|z| = 1$) จะได้ $z = e^{j\omega}$

เราจะได้ ว่า การแปลง z กลายเป็นการแปลงฟูเรียร์

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

การแปลงฟูริเยร์เป็นกรณีพิเศษ ของการแปลงแซด

ตัวอย่าง



วิธีทำ

$$h(n) = \{1, \underset{\uparrow}{0.8}, 0.7, 0.6\}$$

$$H(z) = z + 0.8 + 0.7z^{-1} + 0.6z^{-2}$$

คุณสมบัติการแปลงแซดที่สำคัญ

- การเลื่อน

$$Z[x(n-m)] = z^{-m}X(z)$$

- การประสาน

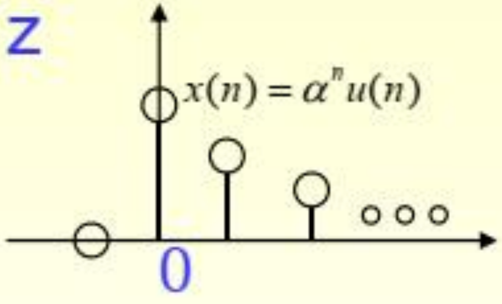
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \Rightarrow Y(z) = H(z)X(z)$$

- การคูณ x(n) ด้วย n

$$Z[nx(n)] = -z\frac{dX(z)}{dz}$$

บริเวณการลู่เข้า (Region Of Convergence)

•พิจารณา $\boxed{x(n)=\alpha^n u(n)}$ ได้การแปลง z

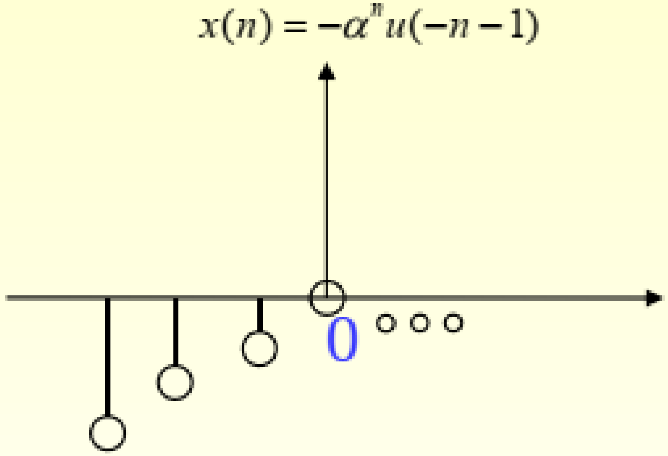


$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha z^{-1}\right)^n=\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$ $\left|\alpha z^{-1}\right|<1$ หรือ $|z|>|\alpha|$

บริเวณการลู่เข้า (ต่อ)

ลองดู $\boxed{x(n) = -\alpha^n u(-n-1)}$



$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha^n z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\alpha z^{-1}\right)^n$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha^{-1} z\right)^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha^{-1} z\right)^n = 1 - \frac{1}{1-\alpha^{-1} z}$$

$$= \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$

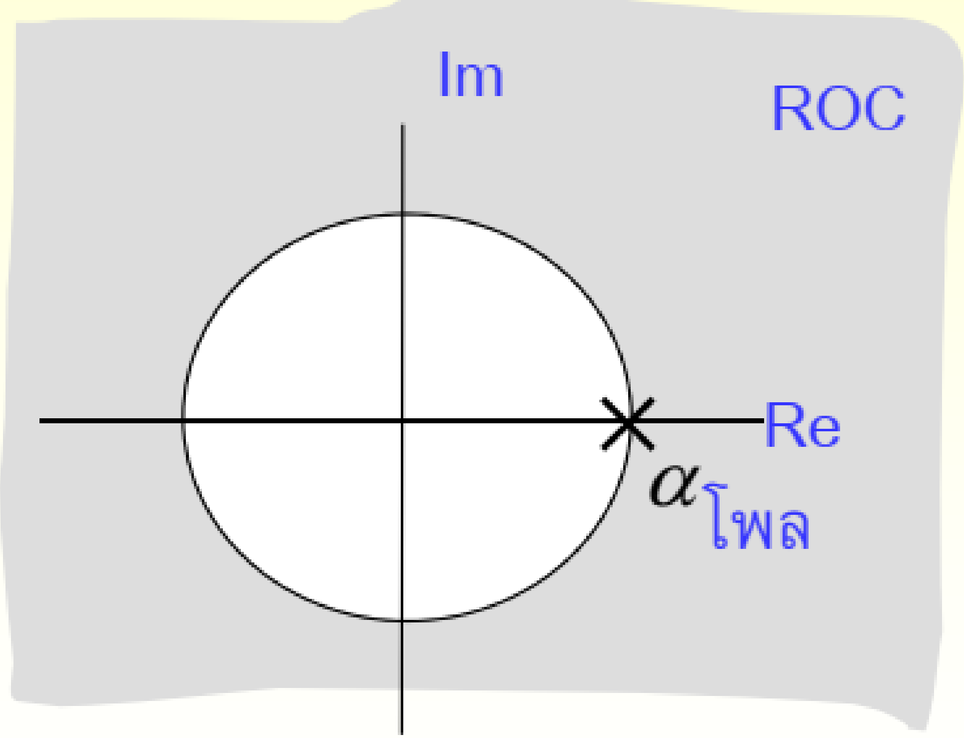
$\left|\alpha^{-1} z\right| < 1,$ หรือ $|z| < |\alpha|$

ต่าง $x(n)$ คำตอบเหมือนกัน อะไรคือความแตกต่าง?

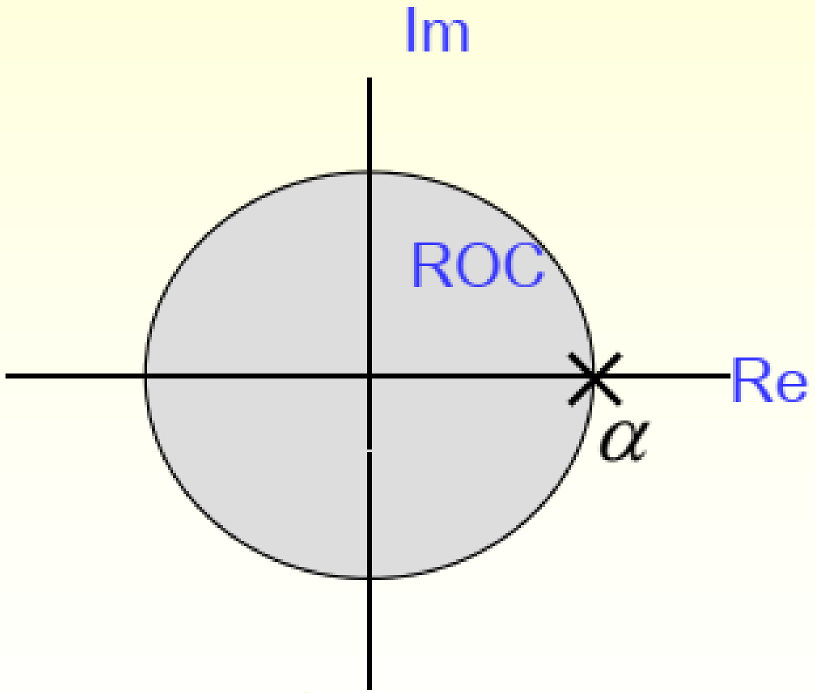
บริเวณการลู่เข้า ROC คือ บริเวณสีเทา เป็นบริเวณที่ทำให้สมการ**เป็นจริง**

$$X(z)=\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$

$x(n)=\alpha^n u(n)$	$x(n)=-\alpha^n u(-n-1)$



ROC อยู่นอกวงกลมรัศมี α



ROC อยู่ในวงกลมรัศมี α

ตัวอย่าง จงหาผลการแปลง Z และ บริเวณการลู่เข้าของ

$$x(n) = \alpha^n u(n) - \beta^n u(-n-1)$$

วิธีทำ

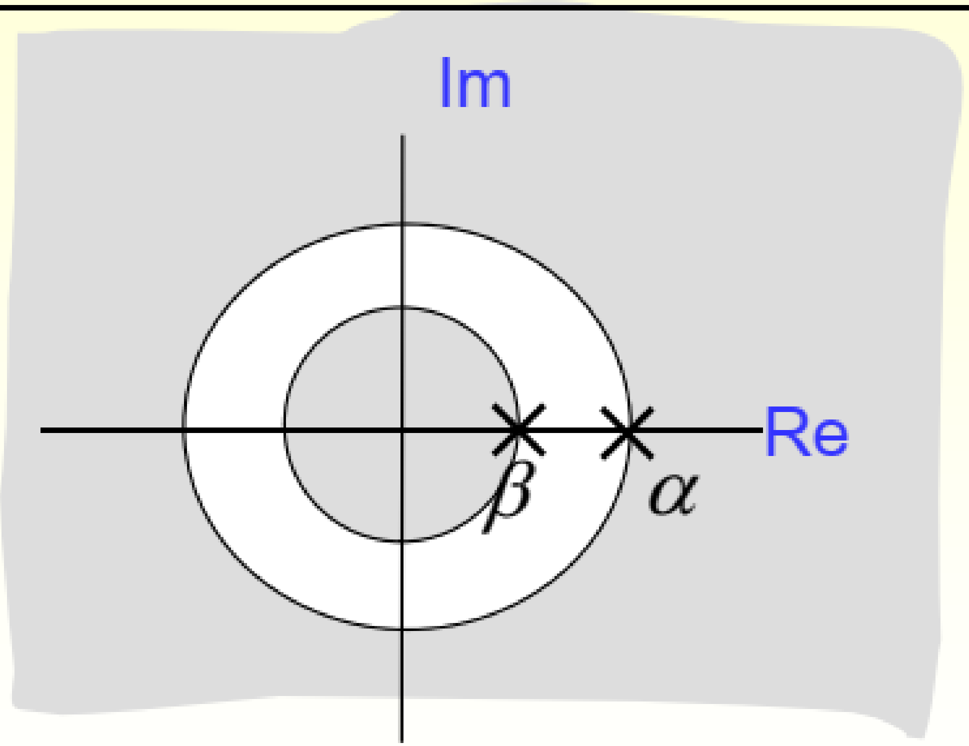
$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} (\beta^{-1} z)^{-n+1}$$

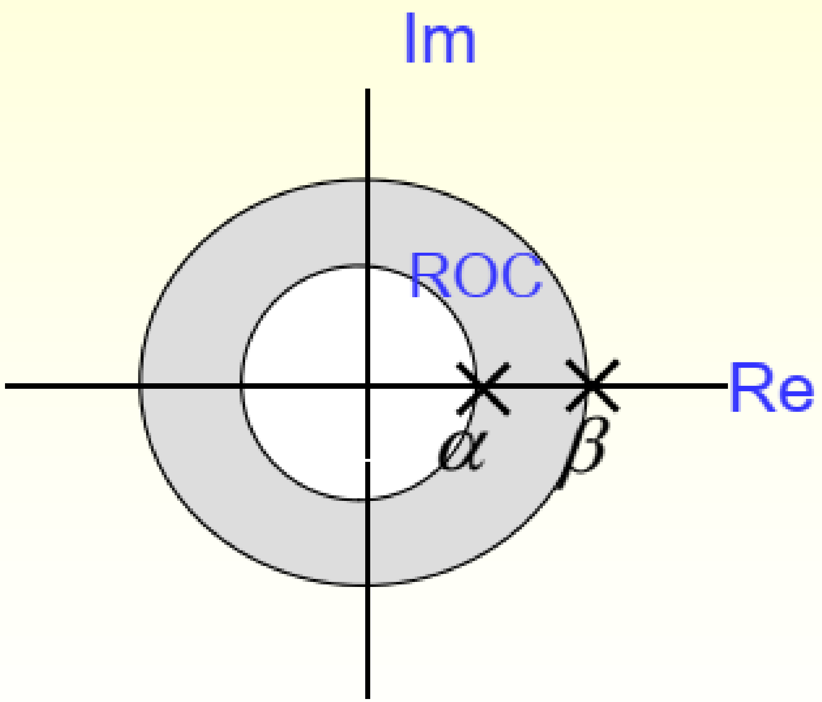
$$= \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} - \frac{1}{1-\beta z^{-1}}$$

เทอม แรก ROC คือ บริเวณ $|z| > |\alpha|$

เทอม สอง ROC คือ บริเวณ $|z| < |\beta|$

บริเวณการลู่เข้า ROCเป็นบริเวณที่เกิดจากการ interceptionของROC ทั้งสอง

<table>
<tr><td colspan="2">$$x(n) = \alpha^n u(n) - \beta^n u(-n-1)$$</td></tr>
<tr><td>$|\beta| < |\alpha|$</td><td>$|\alpha| < |\beta|$</td></tr>
<tr><td>

ROC ไม่มีค่า, ดังนั้นไม่มี X(z)</td><td>

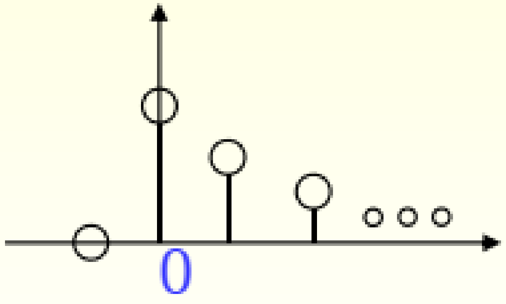
ROC อยู่ระหว่างวงกลม</td></tr>
</table>

ความเป็นคอซัล (Causality)

สัญญาณที่เป็น**คอซัล(causal)** คือสัญญาณที่มีค่าในช่วง $n \geq 0$

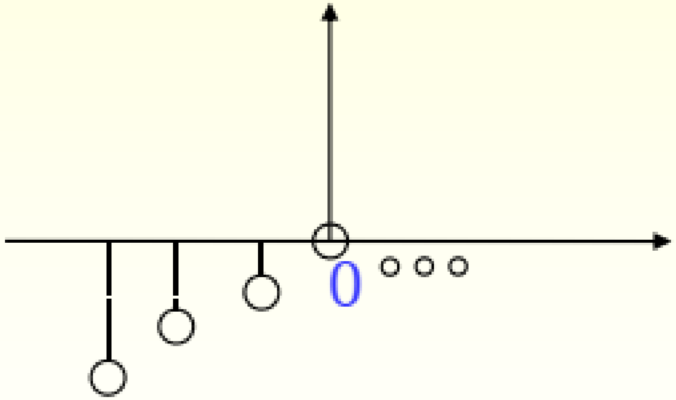
สัญญาณที่เป็น **คอซัลตรงกันข้าม (anti-causal)** มีค่าในช่วง $n < 0$

$x(n) = \alpha^n u(n)$



คอซัล

$x(n) = -\alpha^n u(-n-1)$



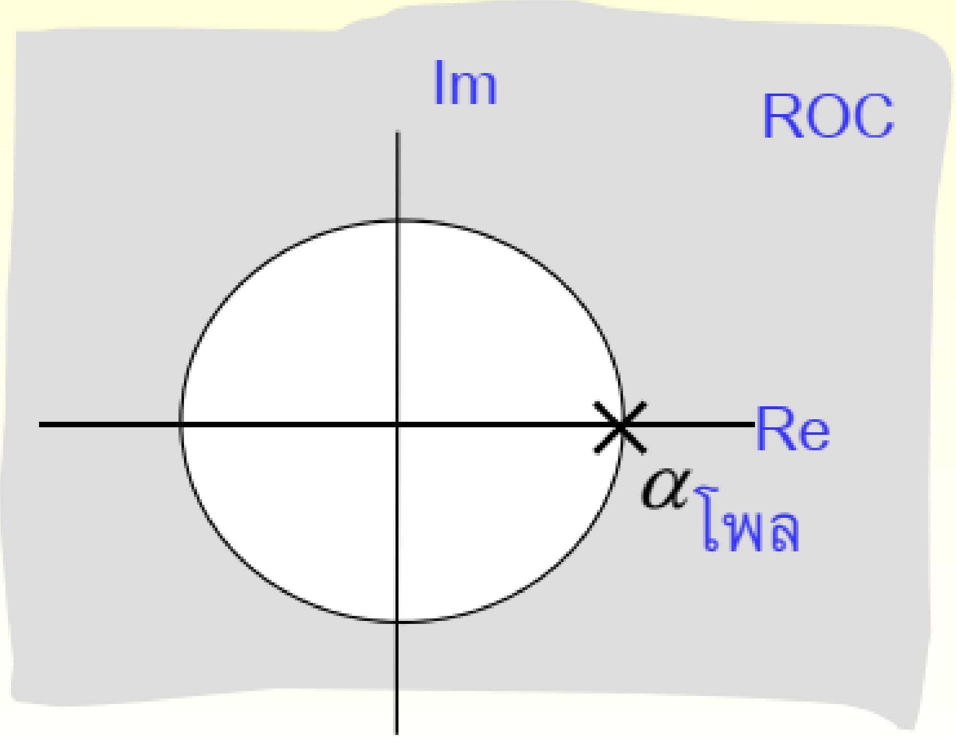
คอซัลตรงกันข้าม

หรือดูจาก ROC ก็ได้

ROC อยู่นอกวงกลม=คอซัล
ROC อยู่ในวงกลม=คอซัลตรงกันข้าม

- คอซัล

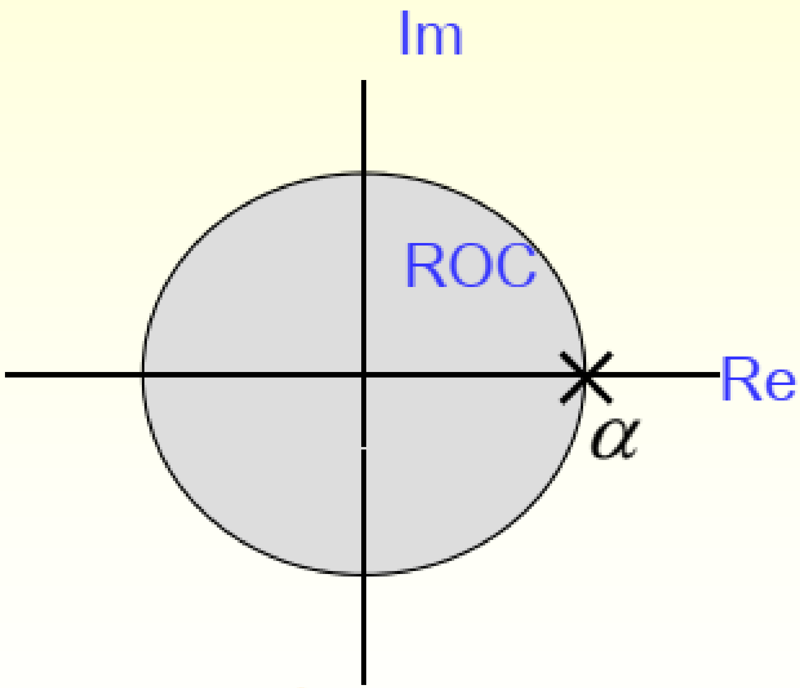
$$x(n) = \alpha^n u(n)$$



ROC อยู่นอกวงกลมรัศมี α

- คอซัลตรงกันข้าม

$$x(n) = -\alpha^n u(-n-1)$$



ROC อยู่ในวงกลมรัศมี α

การแปลง z ผกผัน

(Inversion of the z-Transform)

- เพื่อแปลงกลับจาก โดเมนแซดไปเป็นโดเมนเวลา

$$x(n) \equiv Z^{-1}[X(z)]$$

- พิจารณา

$$X(z) = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_N z^N}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_M z^M}$$

- จัดอยู่ในรูป

$$X(z) = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_N z^N}{(z - p_1)(z - p_2)\ldots(z - p_M)}$$

Table of Z-transform pairs

Entry number	Discrete-time sequence x(n), $n \geq 0$	z-transform X(z)	Region of convergence of X(z)
1	$k\delta(n)$	k	Everywhere
2	k	$\frac{kz}{z-1}$	$\lvert z\rvert > 1$
3	kn	$\frac{kz}{(z-1)^2}$	$\lvert z\rvert > 1$
4	kn^2	$\frac{kz(z+1)}{(z-1)^3}$	$\lvert z\rvert > 1$
5	$ke^{-\alpha n}$	$\frac{kz}{z-e^{-\alpha}}$	$\lvert z\rvert > e^{-\alpha}$
6	$kne^{-\alpha n}$	$\frac{kze^{-\alpha}}{(z-e^{-\alpha})^2}$	$\lvert z\rvert > e^{-\alpha}$
7	$1-e^{-\alpha n}$	$\frac{z(1-e^{-\alpha})}{z^2-z(1+e^{-\alpha})+e^{-\alpha}}$	$\lvert z\rvert > e^{-\alpha}$
8	$\cos(\alpha n)$	$\frac{z(z-\cos\alpha)}{z^2-2z\cos\alpha+1}$	$\lvert z\rvert > 1$
9	$\sin(\alpha n)$	$\frac{z\sin\alpha}{z^2-2z\cos\alpha+1}$	$\lvert z\rvert > 1$
10	$e^{-\alpha n}\sin(\alpha n)$	$\frac{ze^{-\alpha}\sin\alpha}{z^2-2e^{-\alpha}z\cos\alpha+e^{-2\alpha}}$	$\lvert z\rvert > e^{-\alpha}$
11	$e^{-\alpha n}\cos(\alpha n)$	$\frac{ze^{-\alpha}(ze^{\alpha}-\cos\alpha)}{z^2-2ze^{-\alpha}\cos\alpha+e^{-2\alpha}}$	$\lvert z\rvert > e^{-\alpha}$
12	$\cosh(\alpha n)$	$\frac{z^2-z\cosh\alpha}{z^2-2z\cosh\alpha+1}$	$\lvert z\rvert > \cosh\alpha$
13	$\sinh(\alpha n)$	$\frac{z\sinh\alpha}{z^2-2z\cosh\alpha+1}$	$\lvert z\rvert > \sinh\alpha$
14	$k\alpha^n$	$\frac{kz}{z-\alpha}$	$\lvert z\rvert > \alpha$
15	$kn\alpha^n$	$\frac{k\alpha z}{(z-\alpha)^2}$	$\lvert z\rvert > \alpha$
16	$2\lvert c\rvert\lvert p\rvert^n\cos(n\angle p+\angle c)$	$\frac{cz}{z-p}+\frac{c^*z}{z-p^*}$	

k and α are constants; c is a complex number.

โพลสามกรณี

- โพลเป็นจำนวนจริงไม่ซ้ำค่า
- โพลเป็นจำนวนเชิงซ้อนไม่ซ้ำค่า
- โพลเป็นจำนวนซ้ำค่า

1.โพลเป็นจำนวนจริงไม่ซ้ำค่า

ตัวอย่าง

$$Y(z) = \frac{4z^2}{z^2 - 0.25} = \frac{4z^2}{(z-0.5)(z+0.5)}$$

วิธีทำ

$$Y(z) = \frac{4z^2}{(z-0.5)(z+0.5)} = \frac{C_1 z}{z-0.5} + \frac{C_2 z}{z+0.5}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{4z}{(z-0.5)(z+0.5)} = \frac{C_1}{(z-0.5)} + \frac{C_2}{(z+0.5)}$$

หา C1 และ C2

- หา C1 $$\left.\frac{4z\cancel{(z-0.5)}}{\cancel{(z-0.5)}(z+0.5)}\right|_{z=0.5} = \frac{C_1\cancel{(z-0.5)}}{\cancel{(z-0.5)}} + \frac{C_2(z-0.5)}{(z+0.5)}$$

$$C_1 = \left.\frac{4z}{z+0.5}\right|_{z=0.5} = \frac{4(0.5)}{1} = 2$$

- หา C2 $$\left.\frac{4z\cancel{(z+0.5)}}{(z-0.5)\cancel{(z+0.5)}}\right|_{z=-0.5} = \frac{C_1(z+0.5)}{(z-0.5)} + \frac{C_2\cancel{(z+0.5)}}{\cancel{(z+0.5)}}$$

$$C_2 = \left.\frac{4z}{z-0.5}\right|_{z=-0.5} = \frac{4(-0.5)}{-1} = 2$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2}{z-0.5} + \frac{2}{z+0.5}$$

$$Y(z) = \frac{2z}{z-0.5} + \frac{2z}{z+0.5}$$

จากหนังสือ อ พรชัยเปิดตาราง 4.1 หน้า 46 ข้อ 5
และตารางหน้าถัดไป ได้ผลการแปลงผกผันแซดเป็น

$$\boxed{y(n) = 2(0.5)^n u(n) + 2(-0.5)^n u(n)}$$

2.โพลเป็นจำนวนเชิงซ้อนไม่ซ้ำค่า

ตัวอย่าง Y(z) แสดงโดย

$$Y(z)=\frac{z}{z^2+1}$$

วิธีทำ

$$Y(z)=\frac{z}{z^2+1}=\frac{C_1 z}{z-j}+\frac{C_2 z}{z+j}$$

$$\begin{aligned} j &= 0+j \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+j\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= e^{j\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$$Y(z)=\frac{C_1 z}{z-1e^{j\frac{\pi}{2}}}+\frac{C_2 z}{z-1e^{-j\frac{\pi}{2}}}$$

หา C1

$$Y(z)(z-1e^{j\frac{\pi}{2}})=\frac{z(z-1e^{j\frac{\pi}{2}})}{z^2+1}=\frac{C_1 z(z-1e^{j\frac{\pi}{2}})}{z-1e^{j\frac{\pi}{2}}}+\frac{C_2 z(z-1e^{j\frac{\pi}{2}})}{z-1e^{-j\frac{\pi}{2}}}$$

$$\left.\frac{\cancel{(z-1e^{j\frac{\pi}{2}})}}{\cancel{(z-1e^{j\frac{\pi}{2}})}(z-1e^{-j\frac{\pi}{2}})}\right|_{z=e^{j\frac{\pi}{2}}}=\frac{C_1\cancel{(z-1e^{j\frac{\pi}{2}})}}{\cancel{z-1e^{j\frac{\pi}{2}}}}+\frac{C_2\overbrace{(z-1e^{j\frac{\pi}{2}})}^{=0}}{z-1e^{-j\frac{\pi}{2}}}$$

$$C_1=\left.\frac{1}{(z-1e^{-j\frac{\pi}{2}})}\right|_{z=e^{j\frac{\pi}{2}}}=\frac{1}{(e^{j\frac{\pi}{2}}-e^{-j\frac{\pi}{2}})}=\frac{1}{2j}=0.5e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

หา C2

$$Y(z)(z-1e^{-j\frac{\pi}{2}}) = \frac{z(z-1e^{-j\frac{\pi}{2}})}{z^2+1} = \frac{C_1 z(z-1e^{-j\frac{\pi}{2}})}{z-1e^{j\frac{\pi}{2}}} + \frac{C_2 z(z-1e^{-j\frac{\pi}{2}})}{z-1e^{-j\frac{\pi}{2}}}$$

$$\left.\frac{\cancel{(z-1e^{-j\frac{\pi}{2}})}}{(z-1e^{j\frac{\pi}{2}})\cancel{(z-1e^{-j\frac{\pi}{2}})}}\right|_{z=e^{-j\frac{\pi}{2}}} = \frac{C_1\cancel{(z-1e^{-j\frac{\pi}{2}})}}{z-1e^{j\frac{\pi}{2}}} + \frac{C_2\cancel{(z-1e^{-j\frac{\pi}{2}})}}{\cancel{z-1e^{-j\frac{\pi}{2}}}}$$

$$C_2 = \left.\frac{1}{(z-1e^{j\frac{\pi}{2}})}\right|_{z=e^{-j\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{(e^{-j\frac{\pi}{2}}-e^{j\frac{\pi}{2}})} = \frac{1}{-2j} = 0.5e^{j\frac{\pi}{2}}$$

แทนค่า C1 และ C2

$$Y(z) = \frac{C_1 z}{z - 1e^{j\frac{\pi}{2}}} + \frac{C_2 z}{z - 1e^{-j\frac{\pi}{2}}}$$

$$Y(z) = \frac{0.5e^{-j\frac{\pi}{2}} z}{z - 1e^{j\frac{\pi}{2}}} + \frac{0.5e^{j\frac{\pi}{2}} z}{z - 1e^{-j\frac{\pi}{2}}}$$

จาก ตารางที่ 4.1 ข้อ 14 หน้า 46

$$2|C||p|^n \cos(n\angle p + \angle C) \Leftarrow \frac{Cz}{z-p} + \frac{C^* z}{z - p^*}$$

$$0.5\angle -\frac{\pi}{2}$$

$$Y(z)=\frac{0.5e^{-j\frac{\pi}{2}}z}{z-1e^{j\frac{\pi}{2}}}+\frac{0.5e^{j\frac{\pi}{2}}z}{z-1e^{-j\frac{\pi}{2}}}$$

$$1\angle\frac{\pi}{2}$$

$$y(n)=2\left|0.5\right|\left|1\right|^{n}\cos(\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{2})\Leftarrow\frac{0.5e^{-j\frac{\pi}{2}}z}{z-1e^{j\frac{\pi}{2}}}+\frac{0.5e^{j\frac{\pi}{2}}z}{z-1e^{-j\frac{\pi}{2}}}$$

$$=\cos(\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{2})$$

3.โพลเป็นจำนวนซ้ำค่า

ตัวอย่าง

$$Y(z)=\frac{z^2}{(z-0.5)(z-1)^2}$$

วิธีทำ

$$Y(z)=\frac{z^2}{(z-0.5)(z-1)^2}=\frac{C_1 z}{(z-0.5)}+\frac{C_2 z}{(z-1)^2}+\frac{C_3 z}{z-1}$$

หา C1

$$\left.\frac{z^2\,\cancel{(z-0.5)}}{\cancel{(z-0.5)}\,(z-1)^2}\right|_{z=0.5}=\frac{C_1 z\,\cancel{(z-0.5)}}{\cancel{(z-0.5)}}+\frac{C_2 z\,\cancel{(z-0.5)}}{(z-1)^2}+\frac{C_3 z\,\cancel{(z-0.5)}}{z-1}$$

$$\boxed{C_1=\left.\frac{z}{(z-1)^2}\right|_{z=0.5}=\frac{0.5}{(0.5-1)^2}=2}$$

หา C2

$$\left.\frac{z^2\cancel{(z-1)^2}}{(z-0.5)\cancel{(z-1)^2}}\right|_{z=1}=\frac{C_1 z\cancel{(z-1)^2}}{(z-0.5)}+\frac{C_2 z\cancel{(z-1)^2}}{\cancel{(z-1)^2}}+\frac{C_3 z\cancel{(z-1)^2}}{z-1}$$

$$\boxed{C_2=\left.\frac{z}{(z-0.5)}\right|_{z=1}=\frac{1}{(1-0.5)}=2}$$

หา C3

$$\left.\frac{z^2\cancel{(z-1)}}{(z-0.5)(z-1)}\right|_{z=1}=\frac{C_1 z(z-1)}{(z-0.5)}+\frac{C_2 z\cancel{(z-1)}}{z-1}+\frac{C_3 z\cancel{(z-1)}}{\cancel{(z-1)}}$$

แทน z=1 ตรงๆเลย ไม่ได้ (เพราะอะไร?) และ สังเกต การติดค่า C1 ไว้

ต้องแทน C2=2 ลงไปก่อน

$$\left.\frac{z^2}{(z-0.5)(z-1)}\right|_{z=1} = \frac{C_1 z(z-1)}{(z-0.5)} + \frac{(2)z}{z-1} + C_3 z$$

จัดสมการใหม่เพื่อหา C3 $C_3 = \left.\frac{z}{(z-0.5)(z-1)}\right|_{z=1} - \left.\frac{C_1(z-1)}{(z-0.5)}\right|_{z=1} - \left.\frac{(2)}{z-1}\right|_{z=1}$

ใช้ การหา

$$C_3 = \left.\frac{z - C_1(z-1)^2 - 2(z-0.5)}{(z-0.5)(z-1)}\right|_{z=1}$$

สลับเทอม 2 กับ3

$$= \left.\frac{z - 2(z-0.5) - C_1(z-1)^2}{(z-0.5)(z-1)}\right|_{z=1}$$

$$= \left.\frac{-\cancel{(z-1)} - C_1(z-1)}{(z-0.5)\cancel{(z-1)}}\right|_{z=1}$$

แทนค่า z=1ในขั้นตอนนี้

เทอม C1 จะหายไปเองเมื่อ z=1

$$= \frac{-1-0}{(1-0.5)} = -2$$

แทนค่าลงไป

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-0.5)(z-1)^2} = \frac{2z}{(z-0.5)} + \frac{2z}{(z-1)^2} - \frac{2z}{z-1}$$

$$\boxed{y(n) = 2(0.5)^n + 2n - 2}$$

ประโยชน์ของ z-Transform

- ช่วยในการหาผลตอบสนองในโดเมนเวลาของระบบ

ตัวอย่าง

$$y(n)+\sum_{l=1}^{N}a_l y(n-l)=\sum_{m=0}^{M}b_m x(n-m)$$

$$y(n)=0.9y(n-1)+x(n)$$

วิธีทำ

$$Y(z)=0.9z^{-1}Y(z)+X(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{1-0.9z^{-1}}=H(z)$$

$$\boxed{h(n)=(0.9)^n u(n)}$$

2. ช่วยหาผลการประสาน

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

ตัวอย่าง

$$h(n) = (0.5)^n u(n) \qquad x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

วิธีทำ

เราทราบว่า $Y(z) = H(z)X(z)$

$$H(z) = \frac{z}{z-0.5}, \quad |z| > 0.5$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{z}{z-\frac{1}{3}}, \quad |z| > \frac{1}{3}$$

$$Y(z) = \frac{z}{z-0.5} \cdot \frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

หา inverse z-transform

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-0.5)(z-\frac{1}{3})} = \frac{C_1 z}{(z-0.5)} + \frac{C_2 z}{(z-\frac{1}{3})}$$

$$C_1 = 3, C_2 = -2 \quad \Rightarrow \quad Y(z) = \frac{3z}{(z-0.5)} - \frac{2z}{(z-\frac{1}{3})}$$

แปลงกลับ

$$\boxed{y(n) = 3(0.5)^n u(n) - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)}$$

3.ช่วยหาเอาท์พุทของ difference equation

ตัวอย่าง การหมุนของดาวเทียมแสดงได้ด้วย

$$y(n)+y(n-1)+0.5y(n-2)=0.5x(n)+0.5x(n-1)$$

$y(n)$ = ตำแหน่งมุม(angular position)

$x(n)$ = ทอร์ก (Torque) จากตัวขับ

ให้หา y(n) ที่ x(n) เป็น $\delta(n)$

วิธีทำ แปลง z

$$Y(z)-z^{-1}Y(z)+0.5z^{-2}Y(z)=0.5X(z)+0.5z^{-1}X(z)$$

$$Y(z) = \frac{0.5 + 0.5z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}} X(z)$$

ได้ Transfer function

ขยายออกเป็น $$H(z) = \frac{0.5 + 0.5z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{0.5(z+1)}{(z - 0.707e^{j\pi/4})(z - 0.707e^{-j\pi/4})}$$

$$= \frac{0.79e^{-j1.25}}{z - 0.707e^{j\pi/4}} + \frac{0.79e^{j1.25}}{z - 0.707e^{-j\pi/4}}$$

เมื่อ คูณกลับด้วย z

$$Y(z) = \frac{0.79e^{-j1.25}z}{z - 0.707e^{j\pi/4}} + \frac{0.79e^{j1.25}z}{z - 0.707e^{-j\pi/4}}$$

ตำแหน่งมุม y(n) หาได้จากการแปลง z ผกผัน

$$y(n) = 1.58(0.707)^n \cos(\pi n/4 - 1.25), \quad n \geq 0$$

สรุป

- หาผลลัพท์การแปลงแซดได้ในบางกรณีที่ใช้การแปลง DTFT ไม่ได้
- สมการการแปลงแซดให้ความหมายมากกว่าหนึ่งสัญญาณโดเมนเวลา โดยแตกต่างกันตาม ROC
- การแปลงแซดช่วยหาผลลัพธ์สมการผลต่างได้