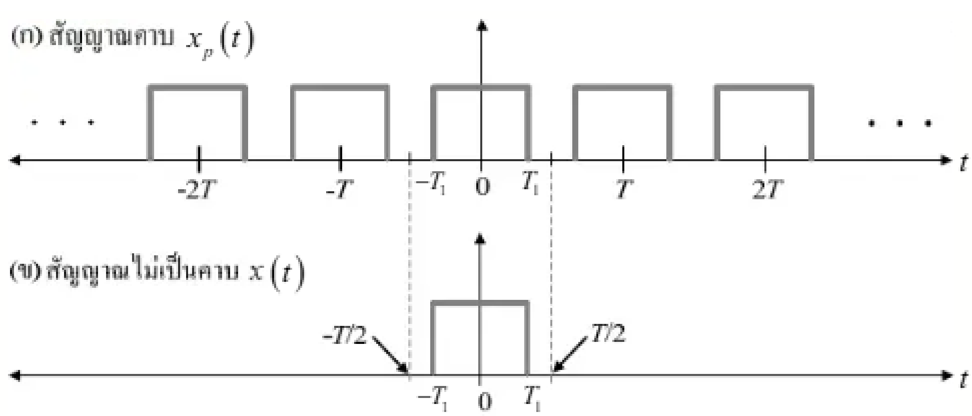
การแปลงฟูเรียร์ (Fourier Transform)

อนุกรมฟูเรียร์ (Fourier series) เป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแทนสัญญาณคาบ (periodic signal) ให้อยู่ในรูปของผลรวมเชิงเส้นของเลขชี้กำลังเชิงซ้อนซึ่งมีประโยชน์มากสำหรับการวิเคราะห์สัญญาณและระบบตามที่อธิบายในบทที่ 4 และ 5 ในทำนองเดียวกันสัญญาณไม่เป็นคาบ (aperiodic signal) ก็สามารถที่จะถูกแทนด้วยผลรวมเชิงเส้นของเลขชี้กำลังเชิงซ้อนได้เช่นกัน โดยอาศัยเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่เรียกว่า "การแปลงฟูเรียร์ (Fourier transform)" [1, 3 – 5, 10 – 11] ทั้งนี้เป็นเพราะว่าสัญญาณไม่เป็นคาบสามารถพิจารณาได้ว่าเป็นสัญญาณคาบที่มีคาบเวลาเท่ากับค่าอนันต์

การแปลงฟูเรียร์ทำหน้าที่ในการแปลงสัญญาณในโดเมนเวลาหรือสัญญาณที่เป็นฟังก์ชันของเวลาให้อยู่ในรูปของสัญญาณในโดเมนความถี่หรือสัญญาณที่เป็นฟังก์ชันของความถี่ ซึ่งจะเรียกกันทั่วไปว่า "สเปกตรัม (spectrum)" สเปกตรัมของสัญญาณมีประโยชน์มากสำหรับการออกแบบอุปกรณ์ในระบบสื่อสารต่างๆ เช่น วงจรกรอง (filter) และอีควอไลเซอร์ (equalizer) เป็นต้น นอกจากนี้การวิเคราะห์สัญญาณในโดเมนความถี่จะง่ายกว่าการวิเคราะห์สัญญาณในโดเมนเวลา รวมทั้งสัญญาณในโดเมนความถี่ยังบอกให้ทราบถึงแบนด์วิดท์ (bandwidth) และรูปร่างสเปกตรัมของสัญญาณ ซึ่งช่วยทำให้เข้าใจคุณสมบัติต่างๆ ของสัญญาณเหล่านั้นมากยิ่งขึ้น ตัวอย่างเช่นวงจรกรองแต่ละแบบจะยอมให้สัญญาณช่วงแถบความถี่หนึ่งผ่านไปได้ในขณะที่จะเกิดการลดทอน (attenuation) ในอีกช่วงแถบความถี่หนึ่ง เป็นต้น



ภาพที่ 6.1 (ก) สัญญาณคาบ $x_p(t)$ และ (ข) สัญญาณไม่เป็นคาบ $x(t)$

ในส่วนนี้จะอธิบายที่มาของสูตรการแปลงฟูเรียร์ที่ต่อเนื่องทางเวลา (CtFT: continuous-time Fourier transform) พร้อมทั้งอธิบายเงื่อนไขการลู่เข้าของการแปลงฟูเรียร์ที่ต่อเนื่องทางเวลา เพื่อใช้ในการพิจารณาว่าสัญญาณไม่เป็นคาบแบบใดจึงจะสามารถหาผลการแปลงฟูเรียร์ได้

โดยทั่วไปสัญญาณไม่เป็นคาบสามารถพิจารณาได้ว่าเป็นสัญญาณคาบที่มีคาบเวลาเท่ากับค่าอนันต์ ตัวอย่างเช่น ภาพที่ 6.1 แสดงสัญญาณคาบ $x_p(t)$ ที่มีคาบเวลาเท่ากับ T และสัญญาณไม่เป็นคาบ $x(t)$ ดังนั้นถ้าพิจารณาว่าคาบเวลา T มีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์ จะได้ว่าสัญญาณ $x_p(t)$ และ $x(t)$ คือสัญญาณเดียวกัน

บทนิยาม สำหรับฟังก์ชัน $f(x)$ ให้

$$\mathcal{F}[f](\omega) = F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx$$

เรียก $F = \mathcal{F}[f]$ ว่า**ผลการแปลงฟูเรียร์**ของ $f(x)$

ในทางกลับกันสำหรับฟังก์ชัน $F(\omega)$ ให้

$$\mathcal{F}^{-1}[F](x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x}\, d\omega$$

เรียก $f = \mathcal{F}^{-1}[F]$ ว่า**ผลการแปลงฟูเรียร์ผกผัน**ของ $F(\omega)$

ทฤษฎีบท สูตรฟูเรียร์อินทิกรัลของฟังก์ชัน $f(x)$ คือ

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[F(\omega)\right]$$

เมื่อ $F(\omega) = \mathcal{F}[f]$

บทพิสูจน์ จากฟูเรียร์อินทิกรัล

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{i\omega(x-y)}dyd\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\omega y}dy\right)e^{i\omega x}d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega = \mathcal{F}^{-1}[F] \end{aligned}$$

ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มทำให้เกิดสองอย่าง

1. การเปลี่ยนโดเมนไปยังโดเมนความถี่

2. การเปลี่ยนฟังก์ชันฐาน ใน F.T เราสามารถเขียนฟังก์ชั่นในรูป cos/sin ในโดเมนความถี่

How does the F.T. works?

An Important Aside

Why do we care about the Fourier Transform?

สมบัติของการแปลงฟูเรียร์

ทฤษฎีบท

(1) สมบัติเชิงเส้น

$$\mathcal{F}[af + bg] = a\mathcal{F}[f] + b\mathcal{F}[g]$$

(2) การแปลงฟูเรียร์ของอนุพันธ์

$$\mathcal{F}[f^{(n)}] = (i\omega)^n \mathcal{F}[f]$$

(3) ทฤษฎีบทสังวัฒนาการ

$$\mathcal{F}[f * g] = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]$$

โดย $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy$

EX. จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

Note. สูตรอินทิกรัล

$$\int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + C$$

เป็นจริงเมื่อ k เป็นจำนวนเชิงซ้อนด้วย พิสูจน์ได้โดย Integration by parts

EX. จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

เมื่อ $a > 0$ เป็นค่าคงตัว

EX. จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} 1, & if\ \frac{-T}{2} \le t \le \frac{T}{2} \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

EX. จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชัน

$$f(t) = A\sin(\omega_0 t)$$

EX. จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} 1 \ , \ if \ |x| < a \\ 0 \ , if \ |x| > a \end{cases}$$