

# สารบัญ

<b>1</b>	<b>ลำดับ</b>	<b>1</b>
1.1	ตัวอย่างลำดับ . . . . .	3
1.2	ลิมิตของลำดับ . . . . .	15
<b>2</b>	<b>อนุกรม</b>	<b>21</b>
2.1	อนุกรม . . . . .	21
2.2	เอกลักษณ์ของ $\sum$ . . . . .	25
2.3	ตัวอย่างอนุกรม . . . . .	32
<b>3</b>	<b>การประยุกต์อนุกรม</b>	<b>45</b>
3.1	ดอกเบี้ย . . . . .	45
3.2	ค่างวด และค่าเงินปัจจุบัน . . . . .	51
<b>4</b>	<b>โจทย์เสริมทักษะ</b>	<b>57</b>



## บทที่ 1

## ลำดับ

**บทนิยาม 1.1.** ลำดับ (sequence) บนเซตของจำนวนจริง คือฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น  $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  หรือ  $A = \mathbb{N}$  และมีเรนจ์เป็นสับเซตของ  $\mathbb{R}$

**ตัวอย่าง 1.1.**

1. ให้  $f: \{1, 2, 3, \dots, 10\} \rightarrow \mathbb{R}$  โดยที่  $f(n) = 2^n$

2. ให้  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  โดยที่  $f(n) = (-1)^n$

กรณีที่เราสนใจเฉพาะเรนจ์ของฟังก์ชัน เราจะแทน  $f(n)$  ด้วย  $a_n$  และเขียนแทนลำดับเหล่านั้นด้วย  $\{a_n\}$  หรือ  $(a_n)$  และเรียก  $a_n$  ว่า พจน์ที่  $n$  ของลำดับ ตัวอย่างเช่น

1. ให้  $f: \{1, 2, 3, \dots, 10\} \rightarrow \mathbb{R}$  โดยที่  $f(n) = 2^n$   
 $a_n = 2^n$  และ  $\{a_n\} = \{2, 4, 8, \dots, 1024\}$

2. ให้  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  โดยที่  $f(n) = (-1)^n$   
 $a_n = (-1)^n$  และ  $\{a_n\} = \{-1, 1, -1, \dots\}$

เรียกลำดับในข้อ 1. ว่า ลำดับจำกัด (finite sequence) และเรียกลำดับในข้อ 2. ว่า ลำดับอนันต์ (infinite sequence)

1.1. ตัวอย่างลำดับ

## 1.1 ตัวอย่างลำดับ

### ลำดับเลขคณิต

บทนิยาม 1.2. ลำดับเลขคณิต (arithmetic sequence) คือลำดับที่มีผลต่าง  $d = a_{n+1} - a_n$  เป็นค่าคงที่ เรียกค่าคงที่  $d$  ว่าผลต่างร่วม (common difference)

ตัวอย่าง 1.2.

1. ลำดับ  $-2, 1, 4, 7, 10, \dots$  มีผลต่างร่วม  $d = 3$

2. ลำดับ  $8, 5, 2, -1, -4, \dots$  มีผลต่างร่วม  $d = -3$

จะเห็นได้ว่าพจน์ที่  $n$  ของลำดับ  $a_n$  อยู่ในรูป

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

ตัวอย่าง 1.3. กำหนดให้ 4 พจน์แรกของลำดับเลขคณิต คือ  $2a + 1, 2b - 1, 3b - a$  และ  $a + 3b$  เมื่อ  $a$  และ  $b$  เป็น จำนวนจริง พจน์ที่ 1000 ลำดับเลขคณิตนี้ เท่ากับเท่าใด

**ตัวอย่าง 1.4.** ถ้า  $x^3, x, x^2$  เป็นจำนวนที่เรียงติดกันในลำดับเลขคณิต แล้วผลรวมของค่า  $x$  ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีค่าเท่าใด

**ตัวอย่าง 1.5.** กำหนดให้ 4 พจน์แรกของลำดับเลขคณิต คือ

$$\frac{a}{b}, ab, a-b, a+b$$

เมื่อ  $a$  และ  $b$  เป็น จำนวนจริง จงหาพจน์ต่อไปของลำดับนี้

6

**ตัวอย่าง 1.6.** ถ้า  $\log_{ab}(a^2b^3), \log_{ab}(a^5b^7), \log_{ab}(a^{11}b^{13})$  เป็นสามพจน์แรกๆของลำดับเลขคณิต แล้วพจน์ที่ 5 ของลำดับนี้มีค่าเท่าใด

**ตัวอย่าง 1.6.** ถ้า  $\log_{ab}(a^2b^3), \log_{ab}(a^5b^7), \log_{ab}(a^{11}b^{13})$  เป็นสามพจน์แรกของลำดับเลขคณิต แล้วพจน์ที่ 5 ของลำดับนี้มีค่าเท่าใด

## ลำดับเรขาคณิต

**บทนิยาม 1.3.** ลำดับเรขาคณิต (geometric sequence) คือลำดับที่มีอัตราส่วนร่วม  $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$  เป็นค่าคงที่ เรียกค่าคงที่  $r$  ว่าอัตราส่วนร่วม (common ratio)

**ตัวอย่าง 1.7.**

1. ลำดับ 2, 6, 18, 54, ... มีอัตราส่วนร่วม  $r = 3$
2. ลำดับ 1, -3, 9, -27, 81, ... มีอัตราส่วนร่วม  $r = -3$
3. ลำดับ 6, 2,  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{2}{9}$ , ... มีอัตราส่วนร่วม  $r = \frac{1}{3}$

จะเห็นได้ว่าพจน์ที่  $n$  ของลำดับ  $a_n$  อยู่ในรูป

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

**ตัวอย่าง 1.8.** กำหนดให้  $a_5 = \frac{15}{16}$  และ  $a_8 = \frac{15}{128}$  เป็นสมาชิกในลำดับเรขาคณิต จงหาจำนวนนับ  $n$  ที่น้อยที่สุดที่ทำให้  $a_n < 0.001$

8

**ตัวอย่าง 1.9.** จำนวนจริง  $a, b, c$  เรียงกันเป็นลำดับเรขาคณิต ถ้า  $abc = 17576$  และ  $a + b + c = 175$  แล้ว  $a + c$  มีค่าเท่าใด

**ตัวอย่าง 1.10.** กำหนดให้สามเหลี่ยม  $ABC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมีความยาวด้าน  $AB, BC, AC$  เรียงกันเป็นลำดับเรขาคณิต จงหาอัตราส่วน  $AC : AB$

ตัวอย่าง 1.11. สมมติว่ากราฟของ  $y = -x^3 + 8x^2 + 40x$  และกราฟ  $y = k$  ตัดกัน 3 จุด โดยพิกัดบนแกน  $x$  ของจุดทั้งสามนี้เรียงกันเป็นลำดับเรขาคณิต จงหาค่า  $k$

### ลำดับเวียนเกิด

ลำดับเวียนเกิดเป็นลำดับที่  $a_n$  สามารถคำนวณได้จาก  $a_k$  โดยที่  $k < n$  ซึ่งเป็นพจน์ก่อน  $a_n$  ความสัมพันธ์ระหว่างพจน์ที่  $n$  กับพจน์ก่อนหน้าในลักษณะนี้จะถูกเรียกว่า **ความสัมพันธ์เวียนเกิด (recurrence relation)** ตัวอย่างเช่น ลำดับฟีโบนัชชี (Fibonacci sequence) ซึ่งถูกนิยามโดย  $F_0 = 0, F_1 = 1$  และ  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  สำหรับ  $n = 2, 3, 4, \dots$  ซึ่งจะได้ลำดับฟีโบนัชชีดังนี้  $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$

**ตัวอย่าง 1.12.** กำหนดลำดับเวียนเกิดดังต่อไปนี้ จงหารูปทั่วไปของ  $a_n$

(i)  $a_1 = 3$  และ  $a_n = 2a_{n-1}$  สำหรับ  $n = 2, 3, 4, \dots$

(ii)  $a_1 = 3$  และ  $a_{n+1} = 2a_n + 1$  สำหรับ  $n = 1, 2, 3, \dots$

(iii)  $a_1 = 4$  และ  $a_n = -\frac{1}{a_{n-1}}$  สำหรับ  $n = 2, 3, 4, \dots$



**ตัวอย่าง 1.13.** กำหนดให้  $a_n$  เป็นพจน์ที่  $n$  ของลำดับ ซึ่งมี  $a_{n+1} = a_n + n$  เมื่อ  $n = 1, 2, 3, \dots$  ถ้า  $a_4 = 26$  แล้ว  $a_1 + a_2 + a_3$  มีค่าเท่าใด

**ตัวอย่าง 1.14.** ให้  $\{b_n\}$  เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่  $b_1 = -3$  และ  $b_{n+1} = \frac{1+b_n}{1-b_n}$  สำหรับ  $n = 1, 2, 3, \dots$  แล้ว  $b_{1000}$  มีค่าเท่าใด

## 1.2 ลิมิตของลำดับ

กรณีลำดับ  $\{a_n\}$  เป็นลำดับอนันต์ เช่น  $a_n = \frac{2n+1}{n+2}$  เมื่อพิจารณา 10 พจน์แรกของลำดับนี้ และนำมาเขียนกราฟ จะได้กราฟดังรูป

กรณีจะเห็นได้ว่า เมื่อ  $n$  มีค่ามาก ๆ ค่าของ  $a_n$  จะมีค่าใกล้เคียงกับ 2 มากขึ้นเรื่อย ๆ หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้เป็น  $a_n \approx 2$  เมื่อ  $n \rightarrow \infty$  และกรณีนี้เราจะกล่าวว่า **ลิมิตของลำดับ  $a_n$  มีค่าเท่ากับ 2 และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+2} = 2 \text{ ดังนี้}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

จึงหมายถึง  $a_n \approx L$  เมื่อ  $n \rightarrow \infty$

พิจารณาลำดับ  $a_n = (-1)^n$  กรณีนี้จะเห็นได้ว่า ไม่มีจำนวนจริง  $L$  ใดที่  $a_n$

ตัวอย่าง 1.15. จงหาขีดจำกัดต่อไปนี้

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n - 3}{2 - 3n^2}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n - 3}{2 - 3n}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n - 3}{2 + 3n^2}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n - 3}{2 - 3n^3}$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 1}{1 - 3^n}$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 2 \cdot 3^n}{3^n - 5 \cdot 2^n}$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

**ตัวอย่าง 1.16.** กำหนดให้  $f(x) = \frac{1}{2x+1}$  และสำหรับจำนวนเต็มบวก  $n$  ใด ๆ  
ให้  $f^n(x) = (f \circ f \circ \dots \circ f)(x)$  โดยที่  $f \circ f \circ \dots \circ f$  มี  $f$  ทั้งหมด  $n$  ตัว  
จงหาค่า  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(1)$

**ตัวอย่าง 1.17.** กำหนดให้  $\{a_n\}$  เป็นลำดับเลขคณิตที่สอดคล้องกับเงื่อนไข  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_1}{n} = 5$  ถ้า  $a_9 + a_5 = 100$  แล้ว  $a_{100}$  เท่ากับเท่าใด

**ตัวอย่าง 1.18.** กำหนดให้  $\{a_n\}$  เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่  $a_1 = 1$  และ

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

สำหรับ  $n = 2, 3, 4, \dots$  ค่าของ  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  เท่ากับเท่าใด

## 2.1 อนุกรม

ให้  $\{a_n\}$  เป็นลำดับใด ๆ อนุกรม (series) ของลำดับ  $\{a_n\}$  คือผลรวมของสมาชิกทุกตัวของลำดับนั้น

กรณี  $\{a_n\}$  เป็นลำดับจำกัด  $n = 1, 2, 3, \dots, 10$  แล้วอนุกรมของลำดับนี้ จะเป็นอนุกรมจำกัด (finite series)  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}$

กรณี  $\{a_n\}$  เป็นลำดับอนันต์  $n = 1, 2, 3, \dots$  แล้วอนุกรมของลำดับนี้ จะเป็นอนุกรมอนันต์ (infinite series)  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$

เพื่อความสะดวกเราจะใช้สัญลักษณ์  $\sum$  "sigma" แทนผลบวกของสมาชิกในลำดับ เช่น

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}$$

และ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

ตัวแปร  $n$  ในสัญลักษณ์ข้างต้นเรียกว่า ดัชนี (index) โดยที่

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{i=1}^{10} a_i = \sum_{k=1}^{10} a_k \text{ เป็นต้น}$$

## อนุกรมลู่เข้า อนุกรมลู่ออก

กรณีที่เราพิจารณาอนุกรมจำกัด จะเห็นได้ว่า  $\sum_{n=1}^N a_n < \infty$  ทุกค่า  $N \in \mathbb{N}$

แต่สำหรับอนุกรมอนันต์  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  นั้นบางอนุกรมมีผลบวกเป็นจำนวนจริง ซึ่งเราจะกล่าวว่าอนุกรมเหล่านั้นเป็น **อนุกรมลู่เข้า (convergent series)** สำหรับอนุกรมที่ไม่ลู่เข้า จะถูกเรียกว่า **อนุกรมลู่ออก (divergent series)**

## ผลบวกย่อย

สำหรับลำดับ  $\{a_n\}$  ผลบวกย่อยลำดับที่  $N$  ( $N^{\text{th}}$ -partial sum) จะหมายถึง

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N$$

และอนุกรมอนันต์จะมีค่าเป็น

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$$

ดังนั้น อนุกรมอนันต์  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N < \infty$

**ตัวอย่าง 2.1.** จงพิจารณาว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots$  เป็น  
อนุกรมที่ลู่เข้า หรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าอนุกรมนี้มีค่าเท่าไร

**ตัวอย่าง 2.2.** จงพิจารณาว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  เป็นอนุกรม  
ที่ลู่เข้า หรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าอนุกรมนี้มีค่าเท่าไร

2.2 เวกลักษณะของ  $\Sigma$ 

## เวกลักษณะที่สำคัญ

$$\sum_{i=1}^n k = nk$$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$4. \sum_{i=1}^n i^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$\sum_{i=1}^n ka_i = k \sum_{i=1}^n a_i$$

$$6. \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$$

ตัวอย่าง 2.3. จงหาค่า  $1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \dots + 21 \cdot 23$

ตัวอย่าง 2.4. จงหาค่า  $\sum_{n=1}^{9999} \frac{1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})(\sqrt[4]{n} + \sqrt[4]{n+1})}$



**ตัวอย่าง 2.5.** ถ้า  $a_n$  เป็นลำดับของจำนวนจริงที่  $a_n = \frac{2 + 4 + 6 + \cdots + 2n}{n^2}$   
สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก  $n$  แล้ว  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  มีค่าเท่ากับเท่าใด

ตัวอย่าง 2.6. สำหรับ  $n = 2, 3, 4, \dots$  กำหนดให้  $a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$   
จงหาค่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_2 a_3 a_4 \cdots a_n}{(a_2 - 1)(a_3 - 1)(a_4 - 1) \cdots (a_n - 1)}$$

ตัวอย่าง 2.7. กำหนดแบบรูป

จ.น.พจน์  $1+2+3+4+5+\dots$   
 $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

จำนวนในพจน์ที่ 5060 ของรูปแบบนี้มีค่าเท่ากับเท่าใด

**ตัวอย่าง 2.8.** หนังสือเล่มหนึ่งมี 500 หน้า หน้าแรกมีคำผิด 1 คำ เว้นไป 1 หน้า  
หน้าที่สามมีคำผิด 1 คำ เว้นไป 3 หน้า หน้าที่เจ็ดมีคำผิด 1 คำ เว้นไป 5 หน้า  
เป็นเช่นนี้ต่อ ๆ ไป จำนวนหน้าที่ไม่ใช่คำผิดจะเพิ่มขึ้นทีละ 2 หน้า จำนวนคำผิดใน  
หนังสือเล่มนี้เท่ากับเท่าใด





ตัวอย่าง 2.9. พิจารณาการจัดเรียงลำดับของจำนวนคือ  $1, 3, 5, 7, 9, \dots$  ในตารางดังต่อไปนี้

แถวที่ 1				1		
แถวที่ 2			3		5	
แถวที่ 3		7		9		11
แถวที่ 4		13	15	17	19	
แถวที่ 5	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:

จากตารางจะเห็นว่า จำนวน 15 อยู่ตำแหน่งที่ 2 (จากซ้าย) ของแถวที่ 4 อยากรหาว่า จำนวน 361 จะอยู่ตำแหน่งใดในแถวที่เท่าใด



## 2.3 ตัวอย่างอนุกรม

### อนุกรมเลขคณิต

สำหรับลำดับ  $\{a_n\}$  ซึ่งเป็นลำดับเลขคณิต โดยที่  $a_n = a_1 + (n - 1)d$  จะได้ว่า

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d)$$

**อนุกรมเรขาคณิต**

สำหรับลำดับ  $\{a_n\}$  ซึ่งเป็นลำดับเลขคณิต โดยที่  $a_n = a_1 r^{n-1}$  จะได้ว่า

$$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r} = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

กรณีที่เป็นอนุกรมอนันต์ จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1} = \frac{a_1}{1 - r} \text{ ถ้า } |r| < 1 \text{ และ } \sum_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1} \text{ ลู่ออก ถ้า } |r| \geq 1$$

ตัวอย่าง 2.10. ถ้า  $\{a_n\}$  เป็นลำดับเลขคณิต และอนุกรมเลขคณิต  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{201} = 303$  แล้ว  $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{200}$  มีค่าเท่าใด

**ตัวอย่าง 2.11.** กำหนดให้  $\{a_n\}$  เป็นลำดับของจำนวนจริงที่สอดคล้องกับ

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = 2 \text{ สำหรับทุกจำนวนนับ } n \text{ ถ้า } \sum_{n=1}^{10} a_n = 31 \text{ แล้ว } \sum_{n=1}^{2552} a_n \text{ มีค่าเท่าใด}$$

**ตัวอย่าง 2.12.** ลำดับเรขาคณิตชุดหนึ่ง มีอัตราส่วนร่วมเป็นจำนวนจริงบวก ถ้าผลบวกของสองพจน์แรกเท่ากับ 20 และผลบวกของสี่พจน์แรกเท่ากับ 65 แล้ว ผลบวกของหกพจน์แรกเท่ากับเท่าใด

**ตัวอย่าง 2.13.** จงหาค่า  $x$  ที่ทำให้  $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + \dots + 2^{x+2015} = 4^x + 4^{x+1} + 4^{x+2} + \dots + 4^{x+2015}$

**ตัวอย่าง 2.14.** ให้  $\{a_n\}$  เป็นลำดับเรขาคณิต ถ้า  $a_1 + a_3 = 15$  และ  $a_2 + a_4 = 30$  แล้ว  $a_1 + a_2 + \dots + a_{100}$  มีค่าเท่าใด

ตัวอย่าง 2.15. จงหาค่า

$$\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots\right) + \left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots\right) + \dots$$

### 2.3. ตัวอย่างอนุกรม

ตัวอย่าง 2.16. กำหนดให้  $\{a_n\}$  เป็น  
บเรขาคณิต ซึ่ง  $\sum_{i=1}^{2011} a_i = 200$  และ  $\sum_{i=1}^{4022} a_i = 380$  จงหาค่า  $\sum_{i=1}^{6033} a_i$

ตัวอย่าง 2.17. จงหาค่า  $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + 100 \cdot 2^{99}$

**ตัวอย่าง 2.18.** ถ้า  $\frac{a}{b} + \frac{a}{b^2} + \frac{a}{b^3} + \dots = 4$  แล้ว  $\frac{a}{a+b} + \frac{a}{(a+b)^2} + \frac{a}{(a+b)^3} + \dots$   
มีค่าเท่าใด

ตัวอย่าง 2.19. จงหาค่า

$$\frac{1}{4 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 16} + \frac{1}{16 \cdot 22} + \cdots + \frac{1}{2020 \cdot 2026}$$

ตัวอย่าง 2.20. จงหาค่า

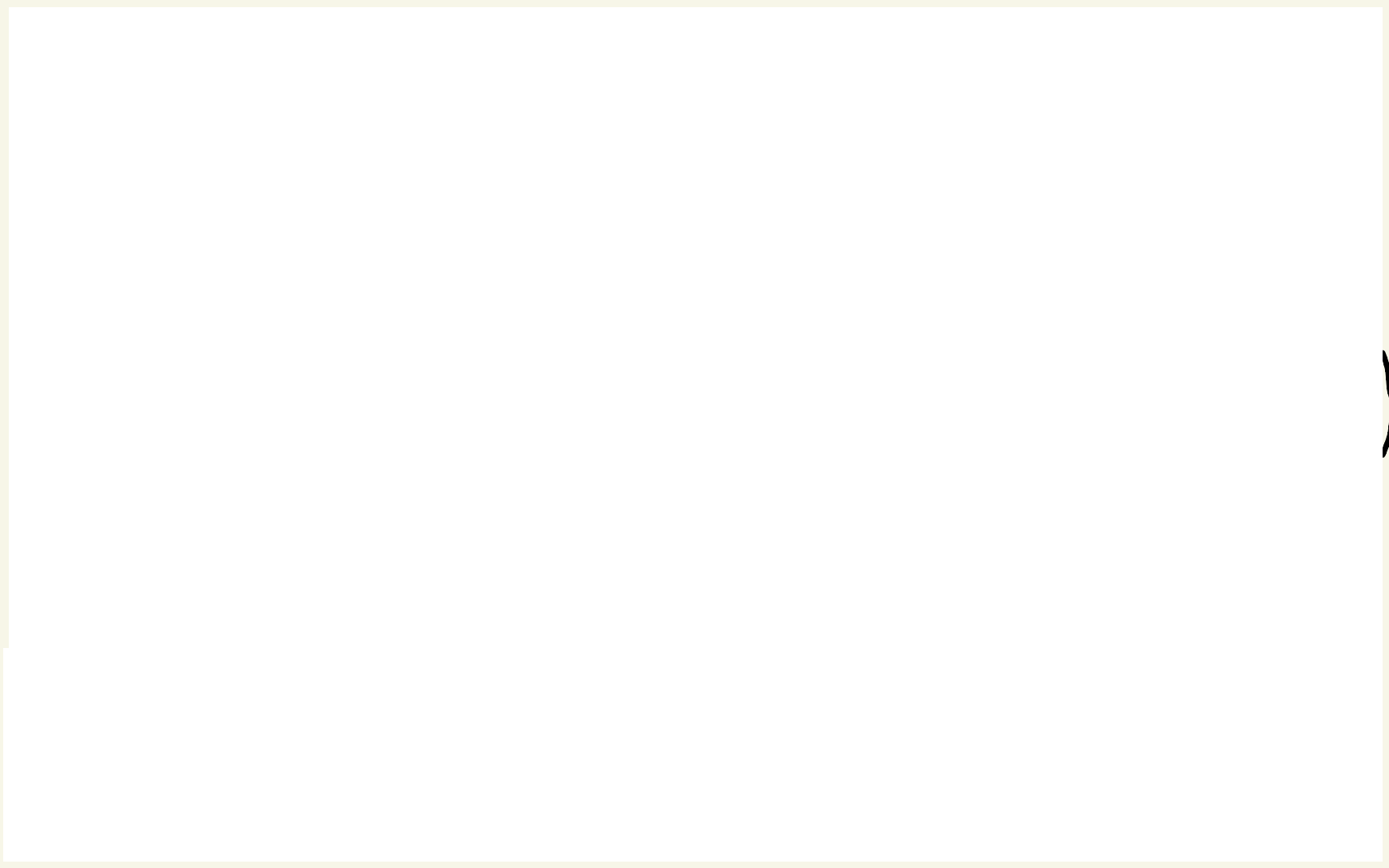
$$\frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{10}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{397} + \sqrt{400}}$$

ตัวอย่าง 2.21. กำหนดให้  $f(x) = 4x^2 - 1$  จงหาค่า

$$\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(3)} + \cdots + \frac{1}{f(84)}$$

ตัวอย่าง 2.22. จงหาค่า

$$\frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{5}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{7}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{81}{40 \cdot 41 \cdot 42}$$







## บทที่ 3

## การประยุกต์อนุกรม

### 3.1 ดอกเบี้ย

#### ดอกเบี้ยคงต้น

ดอกเบี้ยคงต้น หรือ ดอกเบี้ยเชิงเดียว (simple interest) เป็นการคิดดอกเบี้ยเพียงครั้งเดียวหลังจากครบกำหนดเวลา ในการฝาก หรือการกู้ยืม โดยกำหนดให้เงินต้นมีค่าคงที่ตลอดระยะเวลาของการฝากเงินหรือการกู้ยืม เงิน ซึ่งดอกเบี้ยดังกล่าวจะมีค่าเท่ากันทุกปี

ให้  $A$  แทนเงินรวมทั้งหมด

$P$  แทนเงินต้น

$I$  แทนดอกเบี้ยที่จะได้รับ

$r$  แทนอัตราดอกเบี้ยต่อปี

$t$  แทนระยะเวลาเป็นปี

$$A = P + I = P + Prt = P(1 + rt)$$

**ตัวอย่าง 3.1.** พิสัยย์ฝากเงินที่ธนาคารแห่งหนึ่งเป็นจำนวน 10,000 บาท ธนาคารให้ดอกเบี้ย 1.5% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบคงต้น ให้หาว่าเมื่อสิ้นปีที่ 3 พิสัยย์จะมีเงินฝากในธนาคารเป็นเงิน ทั้งหมดเท่าใด

### 3.1. ดอกเบี้ย

**ตัวอย่าง 3.2.** กำนต์เกษมฝากเงินที่ธนาคารแห่งหนึ่งเป็นจำนวน 10,000 บาท ธนาคารให้ดอกเบี้ย 1.5% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบคงต้น 2 ครั้งต่อปี ให้หาว่า สิ้นปีที่ 3 กำนต์เกษมจะมีเงินฝากในธนาคารเป็นเงิน ทั้งหมดเท่าใด

**ตัวอย่าง 3.3.** ชัยภัทรต้องการฝากเงินที่ธนาคารเป็นเงินจำนวนหนึ่ง ธนาคารให้ดอกเบี้ย 0.75% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบคงต้น ถ้าชัยภัทรต้องการให้มีเงินทั้งหมดในบัญชีนี้อย่างน้อย 20,000 เมื่อตอนสิ้นปีที่ 6 อยากทราบว่าชัยภัทรจะต้องฝากเงินไว้กับธนาคารเป็นจำนวนเงินอย่างน้อยเท่าใด

**ตัวอย่าง 3.4.** กมลลักษณะฝากเงินที่ธนาคารแห่งหนึ่งทุกปี เป็นจำนวนเงินปีละ 10,000 บาท ธนาคารให้ดอกเบี้ย 1.5% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบคงต้น ให้หาว่าเมื่อสิ้นปีที่ 3 กมลลักษณะจะมีเงินฝากในธนาคารเป็นเงิน ทั้งหมดเท่าใด

### ดอกเบี้ยทบต้น

ดอกเบี้ยทบต้น (Compound Interest) คือ ดอกเบี้ยที่กำหนดให้มีการนำเอา ดอกเบี้ยที่เกิดขึ้นในแต่ละครั้งที่มีการคิดดอกเบี้ย ไปรวมกับเงินต้นเพื่อนำมาเป็น เงินต้นของงวดต่อไป กล่าวคือ ถ้ามีการคิดดอกเบี้ยทบต้นไปเรื่อย ๆ จะทำให้ เงิน ต้นของงวดต่อไปมีจำนวนมากขึ้น

ให้  $A_n$  แทนเงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่  $n$

$P$  แทนเงินต้น

$r$  แทนอัตราดอกเบี้ยต่องวด

$$A_n = P(1 + r)^n$$

ตัวอย่าง 3.5. สิริภพฝากเงินที่ธนาคารแห่งหนึ่งเป็นจำนวน 10,000 บาท ธนาคารให้ดอกเบี้ย 1.5% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้น ให้หาว่าเมื่อสิ้นปีที่ 3 สิริภพจะมีเงินฝากในธนาคารเป็นเงิน ทั้งหมดเท่าใด

- 1) ให้หาเงินรวมทั้งหมด โดยธนาคารคิดดอกเบี้ยทบต้นต่อปี
- 2) ให้หาเงินรวมทั้งหมด โดยธนาคารคิดดอกเบี้ยทบต้นทุก 6 เดือน
- 3) ให้หาเงินรวมทั้งหมด โดยธนาคารคิดดอกเบี้ยทบต้นทุก 3 เดือน

**ตัวอย่าง 3.6.** เสียหายต้องการฝากเงินที่ธนาคารเป็นเงินจำนวนหนึ่ง ธนาคารให้ดอกเบี้ย 0.75% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้น ถ้าเสียหายต้องการให้มีเงินทั้งหมดในบัญชีนี้อย่างน้อย 20,000 เมื่อตอนสิ้นปีที่ 6 อยากรหาว่าเสียหายจะต้องฝากเงินไว้กับธนาคารเป็นจำนวนเงินอย่างน้อยเท่าใด

- 1) ให้หาเงินรวมทั้งหมด โดยธนาคารคิดดอกเบี้ยทบต้นต่อปี
- 2) ให้หาเงินรวมทั้งหมด โดยธนาคารคิดดอกเบี้ยทบต้นทุก 6 เดือน
- 3) ให้หาเงินรวมทั้งหมด โดยธนาคารคิดดอกเบี้ยทบต้นทุก 3 เดือน

### 3.2 ค่างวด และค่าเงินปัจจุบัน

#### ค่างวดหรือค่ารายงวด

ค่างวด หรือค่าค่ารายงวด (annuity) หมายถึง อนุกรมการจ่ายเงินในช่วงเวลาที่ห่างเท่า ๆ กันเช่นการจ่ายเงินทุก 3 เดือน หรือทุก ๆ ปี การจ่ายเงินครั้งหนึ่งเราเรียกว่างวดหนึ่ง โดยปกติจำนวนเงินที่จ่ายในแต่ละงวดจะเท่ากัน  
ให้  $A$  แทนเงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่  $n$

$P$  แทนเงินฝากแต่ละงวด

$r$  แทนดอกเบี้ยของเงินต้น 1 บาท ในเวลา 1 งวด

$n$  แทนจำนวนงวด

$$A = P(1 + r) \left( \frac{(1 + r)^n - 1}{r} \right)$$

ตัวอย่าง 3.7. สรรณฝากเงินเป็นประจำทุกเดือน เดือนละ 2,000 บาท ต่อเนื่องกัน เป็นระยะเวลา 5 ปี และธนาคารจะให้ดอกเบี้ยร้อยละ 12 ต่อปีโดยจะคิดทบต้นให้ ทุกครั้งที่น่าเงินเข้าฝาก อยากทราบว่า เมื่อ ครบกำหนดเวลา 5 ปี สรรณจะได้รับเงิน พร้อมดอกเบี้ยเป็นจำนวนเท่าใด

$$r = \frac{12}{100} = 0.12$$

**ตัวอย่าง 3.8.** สุภรดาวางแผนเก็บเงินเพื่อให้มีเงินจำนวน 500,000 บาท ในอีก 2 ปีข้างหน้าโดยฝากธนาคารทุก เดือน ทางธนาคารจะให้ดอกเบี้ยร้อยละ 6 ต่อปีและคิดดอกเบี้ยทบต้นให้ในต้นปีถัดไปทุก ๆ เดือน อยากทราบว่าสุภรดาควรฝากเงินกับธนาคารเดือนละเท่าไรเพื่อให้มีเงินครบตามจำนวนที่ต้องการ

### ค่าเงินปัจจุบัน

ค่าเงินปัจจุบัน คือค่าเงิน ณ ปัจจุบันของเงินจำนวนหนึ่งในอนาคต ตัวอย่างเช่น ถ้าเราทราบว่าธนาคารให้ดอกเบี้ยร้อยละ 3 ต่อปี นั่นคือเงินต้น 100 บาท จะได้เงินรวม  $100 + 3 = 103$  บาท ในอีก 1 ปีข้างหน้า เราจึงเทียบได้ว่าเงิน 103 บาท ในอีก 1 ปีข้างหน้า จะมี ค่าเท่ากับเงิน 100 บาท ณ ปัจจุบัน หรืออาจจะกล่าวได้ว่าค่าปัจจุบันของเงิน 103 บาท ในอีก 1 ปีข้างหน้า มี ค่าเท่ากับ 100 บาท

สมมติว่าต้องการซื้อสินค้าราคา  $C$  บาท และต้องการผ่อนส่งเป็นงวด ๆ จำนวน  $n$  งวด จำนวนงวดละเท่ากัน  $P$  บาท โดยส่งงวดแรกเมื่อซื้อสินค้าไปแล้ว 1 งวด และดอกเบี้ยของเงินต้น 1 บาท ใน 1 งวด มีค่า  $i$  บาท

$$C = P \left( \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right)$$

3.2. ค่างวด และค่าเงินปัจจุบัน

ตัวอย่าง 3.9. กฤตินซื้อโทรศัพท์มือถือราคา 20,000 บาท โดยผ่อนส่ง 24 เดือน ดอกเบี้ยร้อยละ 12 ต่อปี คิด ดอกเบี้ยทบต้นทุกเดือน อยากทราบว่ากฤตินจะต้องผ่อนชำระค่าโทรศัพท์เดือนละเท่าไร

**ตัวอย่าง 3.10.** กฤตินขายโทรศัพท์เครื่องเก่าให้ไศภิศ โดยให้ผ่อน 24 เดือน และคิดดอกเบี้ย 12% ต่อปี คิดทบต้นทุกเดือน โดยให้ผ่อนเดือนละ 500 บาท อยากทราบว่า ถ้าไศภิศเปลี่ยนใจจะซื้อเป็นเงินสด ไศภิศจะต้องจ่ายเท่าไร

## บทที่ 4

## โจทย์เสริมทักษะ

ตัวอย่าง 4.1. ให้  $L$  เป็นจำนวนจริงบวก และ  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  เป็นลำดับ

เรขาคณิตของจำนวนจริง โดยที่  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$  และ  $\sum_{n=1}^3 a_n = \frac{L}{3}$  ข้อใดต่อไปนี้ไม่

ถูกต้อง

(a)  $a_4 = \frac{2a_1}{3}$

(b)  $a_{14} = \frac{16a_2}{81}$

(c)  $3(a_7 + a_8 + a_9) = 2(a_4 + a_5 + a_6)$

(d)  $\sum_{n=7}^{12} a_n = \frac{16L}{81}$

(e)  $\sum_{n=10}^{\infty} a_n = \frac{8L}{27}$







ตัวอย่าง 4.2. ให้  $x > 0$  และให้  $S$  แทนอนุกรม  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\log x)^n$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- (i) ถ้า  $x < 10$  แล้วอนุกรม  $S$  เป็นอนุกรมลู่ออก
- (ii) ถ้า  $x = 100$  แล้วอนุกรม  $S$  เป็นอนุกรมลู่ออก
- (iii) ถ้า  $x = \frac{1}{10}$  แล้วผลบวก 100 พจน์แรกของอนุกรม  $S$  มีค่าเท่ากับ  $+100$

ข้อใดถูกต้อง



ตัวอย่าง 4.3. กำหนดให้  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  เป็นลำดับเลขคณิตของจำนวนเต็มบวก โดยที่  $a_1 = 1$  และ  $a_8 = 36$  ถ้า

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \frac{1}{\sqrt{a_3} + \sqrt{a_4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = 3$$

แล้ว  $n$  เท่ากับเท่าใด



**ตัวอย่าง 4.4.** ให้  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  เป็นลำดับเรขาคณิตของจำนวนจริงบวก โดยมีผลบวกของพจน์ที่สองกับพจน์ที่สี่เท่ากับ 60 และพจน์ที่สามเท่ากับ 18 ให้  $S_n$  เป็นผลบวก  $n$  พจน์แรกของลำดับ  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  แล้วค่าของ  $\frac{S_8}{S_4} + \frac{S_4}{S_2}$  มีค่าเท่าไร

ตัวอย่าง 4.5. กำหนดให้  $a, b$  เป็นจำนวนจริงบวก และให้  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่  $a_1 = a, a_2 = b$  และ  $a_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}}{n-1}$

สำหรับ  $n = 3, 4, 5, \dots$  ถ้า  $a_1 + 2a_2 + 5a_3 + 4a_4 = \frac{31}{8}$  และ  $\sum_{n=1}^{10} a_n = \frac{30}{8}$

แล้ว  $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2$  มีค่าเท่าใด





**ตัวอย่าง 4.6.** ให้  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  เป็นลำดับของจำนวนจริงที่มีผลบวกสี่พจน์แรกเท่ากับ 14 และ  $a_{20} = a_{10} + 30$  และให้  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$  เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่  $b_1 = a_3$  และ  $b_{n+1} = b_n + 1$  สำหรับ  $n = 1, 2, 3, \dots$   
ค่าของ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$  เท่ากับเท่าใด

ตัวอย่าง 4.7. กำหนดให้  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  เป็นลำดับเรขาคณิตของจำนวนจริง ซึ่งมีผลบวก 5 พจน์แรกเท่ากับ 275 และ  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 243$  แล้ว  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} a_n$  มีค่าเท่าใด





**ตัวอย่าง 4.8.** ให้  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  เป็นลำดับเลขคณิตของจำนวนจริงบวก โดยมีผลบวก  $n$  พจน์แรกของลำดับเท่ากับ  $3n^2 + 2n$  สำหรับ  $n = 1, 2, 3, \dots$  ถ้า  $\frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2^2}a_{2^2} + \frac{1}{2^3}a_{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{10}}a_{2^{10}} = m$  แล้วจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดที่น้อยกว่า  $m$  มีค่าเท่าใด

**ตัวอย่าง 4.9.** กำหนดให้  $a, b, c$  เป็นจำนวนจริงจัดเรียงกันเป็นลำดับเรขาคณิต โดยที่  $a + b + c = 14$  และ  $a, b + 3, c + 4$  จัดเรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต ค่าของ  $a^2 + b^2 + c^2$  เท่ากับเท่าใด

ตัวอย่าง 4.10. กำหนดให้  $s_n$  เป็นผลบวกย่อย  $n$  พจน์แรกของอนุกรม

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8} + \frac{15}{16} + \cdots$$

จงหาค่า  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{S_{2n}}$

ตัวอย่าง 4.11. กำหนดให้  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  เป็นลำดับเรขาคณิตซึ่ง

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{3}{2} \text{ และ}$$

$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$  เป็นลำดับเรขาคณิตซึ่ง  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 5$

ถ้า  $a_1 = 1$  และ  $b_1 = 7$  แล้ว  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$  มีค่าเท่าใด

ตัวอย่าง 4.12. กำหนดให้  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  เป็นลำดับเลขคณิตซึ่ง  
 $a_1 + a_3 = 7$  และ  $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 = 74$  จงหาค่า  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{50}$

**ตัวอย่าง 4.13.** กำหนดให้  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวก จงหาเซตของจำนวนจริง  $x$  ทั้งหมดที่ทำให้

$$(x + 3)^2 + (x + 3)^4 + (x + 3)^6 + \cdots + (x + 3)^{2n} + \cdots$$

เป็นอนุกรมลู่เข้า

**ตัวอย่าง 4.14.** เอกต้องการฝากเงิน 200 บาท เข้าบัญชีธนาคารทุกวันที่ 1 ของเดือน ติดต่อกันเป็นเวลา 6 เดือน โดยธนาคารให้อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 6 ต่อปีและคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน

ถ้าเอกเปิดบัญชีเงินฝากและเริ่มฝากเงินครั้งแรกในวันที่ 1 เมษายน 2563 แล้วในวันที่ 31 มีนาคม 2564 เอกจะมีเงินในบัญชีธนาคารรวมทั้งหมดกี่บาท โดยที่ไม่มี การถอนเงินในระหว่างนี้



ตัวอย่าง 4.15. วันที่ 1 มีนาคม 2564 อลินซื้อห้องในคอนโดมิเนียมแห่งหนึ่งราคา 600,000 โดยจ่ายเงินดาวน์จำนวนหนึ่ง และผ่อนชำระค่าห้องส่วนที่เหลือเป็นจำนวนเงินเดือนละ 10,000 บาท เป็นเวลา 48 เดือน โดยผ่อนชำระทุกสิ้นเดือน ถ้าผู้ขายกำหนดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 12 ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นพอดีแล้ว อลินจ่ายเงินดาวน์จำนวนกี่บาท



ตัวอย่าง 4.16. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

i)  $\frac{1}{2}, \sum_{k=1}^2 \left(\frac{1}{2}\right)^k, \sum_{k=1}^3 \left(\frac{1}{2}\right)^k, \dots, \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k, \dots$  เป็นลำดับลู่เข้า

(ii)  $\sin \pi, \sin 2\pi, \sin 3\pi, \dots, \sin n\pi, \dots$  เป็นลำดับลู่ออก

(iii) ถ้า  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  เป็นลำดับลู่เข้า แล้ว  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  เป็นอนุกรมลู่เข้า

ข้อความใดถูกต้อง

ตัวอย่าง 4.17. ถ้า  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \tan^{2k} x = \frac{4}{5}$  เมื่อ  $0 < x < \frac{\pi}{4}$  แล้ว  $\cos 2x$  เท่ากับเท่าใด

ตัวอย่าง 4.18. ในวันที่ 1 มกราคม 2565 ตั้่นน้ำฝากเงิน 10,000 บาท เข้าบัญชีธนาคารได้รับอัตราดอกเบี้ย 4% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 6 เดือน ถ้า ตั้่นน้ำได้รับดอกเบี้ยสิ้นเดือนมิถุนายนและสิ้นเดือนธันวาคมของทุกปี และในวันที่ 1 มกราคม 2565 ถึงวันที่ 31 ธันวาคม 2566 ตั้่นน้ำฝากและถอนเงินดังนี้

วันที่ / เดือน / ปี	รายการ	
	ฝาก (บาท)	ถอน (บาท)
01 / 01 / 2565	10,000	—
01 / 07 / 2565	—	4,000
01 / 01 / 2566	6,000	—

แล้วในวันที่ 1 มกราคม 2567 ตั้่นน้ำจะมีเงินในบัญชีธนาคารรวมทั้งหมดกี่บาท

~~1.  $10,000(1.04)^4 - 4,000(1.04)^3 + 6,000(1.04)$~~

~~2.  $10,000(1.04)^4 - 4,000(1.04)^3 + 6,000(1.04)^2$~~

~~3.  $10,000(1.02)^4 - 4,000(1.02)^3 + 6,000(1.02)$~~

~~4.  $10,000(1.02)^4 - 4,000(1.02)^3 + 6,000(1.02)^2$~~

~~5.  $10,000(1.02)^5 - 4,000(1.02)^4 + 6,000(1.02)^3$~~



