ดีเทอร์มิแนนต์และแมททริกซ์ (ต่อ)

แมททริกซ์เป็นวิธีการทางคณิตศาสตร์ สำหรับแก้ปัญหาในระบบสมการที่/ซับซ้อน อย่างเช่นในโครงข่ายวงจรไฟฟ้า ที่/ประกอบด้วยโหลดหลายๆ ตัว และแหล่งจ่ายพลังงานหลายๆ ตัว ประกอบกันเป็นระบบที่ใหญ่ การใช้แมททริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์ ในการแก้ปัญหาจะทำได้อย่างสะดวกและรวดเร็ว สามารถช่วยลดความยุ่งยากได้เป็นอย่างมาก เป็นเครื่/องมือที่/มีประสิทธิภาพสูง หากผู้ใช้ศึกษาให้เข้าใจและมีความชำนาญ

1.1 แมททริกซ์ (Matrix)

แมททริกซ์ หมายถึง กลุ่มของจำนวนใดๆ ที่นำมาเรียงกันเป็นแถวและหลักอย่างเป็นระเบียบ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งแต่ละแถวหรือหลักประกอบด้วยจำนวนเท่าๆ กัน โดยมีเครื่องหมาย [ ] ล้อมรอบจำนวนเหล่านั้นไว้ ตัวอย่างของแมททริกซ์เช่น

$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ เป็นแมททริกซ์ขนาด 2×2 หมายถึงแมททริกซ์ขนาด 2 แถว คูณ 2 หลัก

$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ เป็นแมททริกซ์ขนาด 3×3 หมายถึงแมททริกซ์ขนาด 3 แถว คูณ 3 หลัก

$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 7 & 5 & 3 & 6 \\ 9 & 8 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นแมททริกซ์ขนาด 4×4 หมายถึงแมททริกซ์ขนาด 4 แถว คูณ 4 หลัก

สัญลักษณ์ของแมททริกซ์

ถ้ากำหนดให้ A เป็นแมททริกซ์ประกอบด้วย m แถว และ n หลัก เขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{แถวที่ 1} \\ \leftarrow \text{แถวที่ 2} \\ \leftarrow \text{แถวที่ 3} \\ \\ \leftarrow \text{แถวที่ n} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{หลักที่ 1} & \text{หลักที่ 2} & \text{หลักที่ 3} & \text{หลักที่ m} \end{array}$$

แมททริกซ์ที่ประกอบไปด้วย m แถว และ n หลักเราเรียกว่า $m \times n$ แมททริกซ์ หรือแมททริกซ์ขนาด $m \times n$ นิยมเขียนเป็นสัญลักษณ์ย่อๆ ได้ดังนี้

$$A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{m \times n} \quad \text{หรือ} \quad A_{m \times n}$$

1.2 ดิเทิอร์มิแนนต์ (Determinant)

นิยาม กำหนดให้ A เป็นแมททริกซ์จัตุรัสใดๆ ดีเทอร์มิแนนต์ของ A เขียนแทนด้วย ΔA หรือ $\det A$ ถ้า $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ แล้วหา $\det A$ ได้ดังนี้

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{22}$$

ตัวอย่างที่ 4.1 จงหาดีเทอร์มิแนนต์ของแมททริกซ์ต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = +(2)(-4) - (6)(5)$$

$$= -8 - 30$$

$$\therefore \ \det A = -38$$ ....**<u>ตอบ</u>**

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = +(2)(4) - (1)(-3)$$

$$= 8 + 3$$

$$\therefore \ \det B = 11$$ ....**<u>ตอบ</u>**

ดีเทอร์มิแนนต์ของแมททริกซ์ขนาด 3×3

ถ้า $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ แล้วหา $\det A$ ได้ดังนี้

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad\qquad - \quad\ - \quad\ - \\ \det A = \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right] \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \quad\ + \quad\ + \end{array}$$

การคิดเครื่องหมายเช่นเดียวกับกรณีแมททริกซ์ 2×2 คือคูณลงเป็นบวก คูณขึ้นเป็นลบ จะได้

$$\det A = +(a_{11}a_{22}a_{33}) + (a_{12}a_{23}a_{31}) + (a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13}) - (a_{32}a_{23}a_{11}) - (a_{33}a_{21}a_{12})$$

ตัวอย่างที่ 4.2 จงหาดีเทอร์มิแนนต์ของแมททริกซ์ A และ B

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 6 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 6 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ นำ 2 หลักแรกมาต่อถัดจากหลักที่ 3 ในแมททริกซ์ A จะได้

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 6 & -4 & 3 & 6 & -4 \end{array}\right.$$

$$= +(1)(0)(3)+(-2)(-1)(6)+(3)(4)(-4)-(6)(0)(3)-(-4)(-1)(1)-(3)(4)(-2)$$

$$= 0+12+(-48)-0-4-(-24)$$

$\therefore \det A = 12-48-4+24 = -16$ ....**<u>ตอบ</u>**

นำ 2 หลักแรกมาต่อถัดจากหลักที่ 3 ในแมททริกซ์ B จะได้

$$\det B = \left|\begin{array}{ccc|cc} -1 & 3 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 6 & -4 & 3 & 6 & -4 \end{array}\right.$$

$$= +(-1)(-1)(3)+(3)(0)(6)+(2)(2)(-4)-(6)(-1)(2)-(-4)(0)(-1)-(3)(2)(3)$$

$$= +(3)+(0)+(-16)-(-12)-(0)-(18)$$

$\therefore \det B = 3-16+12-18 = -19$ ....**<u>ตอบ</u>**

1.3 ไมเนอร์ (minor) ของสมาชิกของแมททริกซ์ จัตุรัส

นิยาม ถ้า $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ หรือ A เป็นแมททริกซ์จัตุรัส ไมเนอร์ของ a_{ij} คือ ดีเทอร์มิแนนต์ของสมาชิก A ที่เหลือจากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ของ A ออกไปไมเนอร์ของ a_{ij} เขียนแทนด้วย M_{ij}

ตัวอย่างที่ 4.3 กำหนดแมททริกซ์ B จงหาไมเนอร์ของสมาชิก B ทั้งหมด

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$B = \begin{bmatrix} \boxed{6} & \boxed{5} \\ -\boxed{4} & 1 \end{bmatrix}$$

$M_{11} = 1$ ได้จากการตัดแถวที่ 1 หลักที่ 1

$$B = \begin{bmatrix} \boxed{6} & \boxed{5} \\ -4 & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

$M_{12} = -4$ ได้จากการตัดแถวที่ 1 หลักที่ 2

$$B = \begin{bmatrix} \boxed{6} & 5 \\ \boxed{-4} & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

$M_{21} = 5$ ได้จากการตัดแถวที่ 2 หลักที่ 1

$$B = \begin{bmatrix} 6 & \boxed{5} \\ \boxed{-4} & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

$M_{22} = 6$ ได้จากการตัดแถวที่ 2 หลักที่ 2

ตัวอย่างที่ 4.4 กำหนดแมททริกซ์ A จงหา M_{13} , M_{22} , M_{32}

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 6 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ หา M_{13} ตัดแถวที่ 1 หลักที่ 3 ออกไป

จะได้ $$M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= +(4)(-4)-(6)(0)$$

$$\therefore \ M_{13} = -16-0 = -16$$ ....**<u>ตอบ</u>**

หา M_{22} ตัดแถวที่ 2 หลักที่ 2 ออกไป

จะได้ $$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= +(1)(3)-(6)(3)$$

$$\therefore \ M_{22} = 3-18 = -15$$ ....**<u>ตอบ</u>**

หา M_{32} ตัดแถวที่ 3 หลักที่ 2 ออกไป

จะได้ $$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= +(1)(-1)-(4)(3)$$

$$\therefore \ M_{32} = -1-12 = -13$$ ....**<u>ตอบ</u>**

1.4 โคแฟกเตอร์ (cofactor)

นิยาม ถ้า $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ หรือ A เป็นแมททริกซ์จัตุรัสโคแฟกเตอร์ของ a_{ij} เขียนแทนด้วย C_{ij} หาได้จาก

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

ตัวอย่างที่ 4.5 กำหนดแมททริกซ์ B จงหาโคแฟกเตอร์ของสมาชิก B ทุกตัว

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}$$

$$C_{11} = (-1)^{2}(3)$$

$$C_{11} = (1)(3) = 3 = M_{11}$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12}$$

$$C_{12} = (-1)^{3}(-5)$$

$$C_{12} = (-1)(-5) = 5 = -M_{12}$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21}$$

$$C_{21} = (-1)^{3}(4)$$

$$C_{21} = (-1)(4) = -4 = -M_{21}$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22}$$

$$C_{22} = (-1)^{4}(2)$$

$$C_{22} = (1)(2) = 2 = M_{22}$$

สรุป

1) ถ้า $i+j$ เป็นเลขคู่ แล้ว $C_{ij} = M_{ij}$ (เครื่องหมายเหมือนกัน)

2) ถ้า $i+j$ เป็นเลขคี่ แล้ว $C_{ij} = -M_{ij}$ (เครื่องหมายตรงกันข้าม)

3) การคิดเครื่องหมายของ C_{ij} เทียบกับ M_{ij} สรุปเป็นแผนผังได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

แมททริกซ์ขนาด 3×3 แมททริกซ์ขนาด 4×4

1.5 การหาดิเทอร์มิแนนซ์โดยการลดขนาด

นิยาม ถ้า A เป็นแมททริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n \ (n \geq 2)$ ดีเทอร์มิแนนต์ของ A เท่ากับผลบวกของผลคูณของสมาชิกในแถวใดแถวหนึ่ง (หรือหลักใดหลักหนึ่ง) กับโคแฟกเตอร์ของสมาชิกตัวนั้น

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1j} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2j} \cdots a_{2n} \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots & a_{ij} \cdots a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nj} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}$$

เลือกแถวที่ i $\quad \det A = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \cdots + a_{ij}c_{ij} + \cdots + a_{in}c_{in}$

เลือกหลักที่ j $\quad \det A = a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \cdots + a_{ij}c_{ij} + \cdots + a_{nj}c_{nj}$

ตัวอย่างที่ 4.6 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 7 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา det A โดยการลดขนาด

วิธีทำ เลือกแถวที่ 2 (เพราะแถวที่ 2 มีสมาชิกเป็นศูนย์ 2 ตัว)

$$\det A = \begin{vmatrix} \underset{-}{3} & \underset{+}{6} & \underset{-}{-2} \\ \boxed{0 \quad 4 \quad 0} \\ 7 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -a_{21}c_{21} + a_{22}c_{22} - a_{23}c_{23}$$

เนื่องจาก $a_{21} = 0$ และ $a_{23} = 0$ จะได้

$$\det A = 0c_{21} + (a_{22})(c_{22}) + 0c_{23}$$

$$\det A = +4\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4\left[+(3)(2) - (7)(-2)\right]$$

$$= 4\left[+(6) - (-14)\right]$$

$$\therefore \det A = 4(20) = 80$$ ....**<u>ตอบ</u>**

1.6 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้กฎของคราเมอร์ (Crammer's Rule)

การแก้ระบบสมการเชิงเส้น มีหลายวิธีด้วยกัน เช่น การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธีของเกาส์ การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้อินเวอร์สของแมททริกซ์ และ การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยกฎของคราเมอร์ ในหน่วยนี้นักเรียนจะศึกษาการแก้ระบบสมการ โดยใช้กฎของคราเมอร์ ซึ่งง่ายและสะดวก เหมาะสำหรับสาขาไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์

รูปแบบของระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปร เป็นดังนี้

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$$

โดยที่ x, y และ z คือตัวแปรที่ต้องการทราบค่า a และ b คือค่าคงที่ และใช้สัญลักษณ์ที่เรียกว่า เดลต้า (delta):Δ เป็นค่าดีเทอร์มิแนนต์ซึ่งสมาชิกประกอบด้วยสัมประสิทธิ์ของ x, y และ z เรียงตามลำดับจากหลักที่ 1 ถึงหลักที่ 3

จากรูปแบบระบบสมการเชิงเส้นข้างบน เขียนให้อยู่ในรูปสมการแมททริกซ์ได้ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

ขั้นตอนในการหาค่า Δ, x, y และ z สรุปได้ดังนี้

1) หาเดลต้า : $$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

2) การหาค่า $\Delta x, \Delta y, \Delta z$

การหา Δx ทำได้โดยการนำข้อมูลของหลัก b_1, b_2, b_3 มาแทนในหลักที่ 1 ในแมททริกซ์ของ Δ ดังนี้

$$\Delta x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

การหา Δy ทำได้โดยการนำข้อมูลของหลัก b_1, b_2, b_3 มาแทนในหลักที่ 2 ในแมททริกซ์ของ Δ ดังนี้

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

การหา Δz ทำได้โดยการนำข้อมูลของหลัก b_1, b_2, b_3 มาแทนในหลักที่ 3 ในแมททริกซ์ของ Δ ดังนี้

$$\Delta z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

3) หาคำตอบของสมการ เมื่อหาค่าต่างๆ ได้แล้ว คือ Δ , Δx , Δy , Δz ขั้นต่อไปคือ หาค่า x, y และ z ที่ทำให้สมการเป็นจริง

ซึ่งจะได้ $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta y}{\Delta}$ และ $z = \dfrac{\Delta z}{\Delta}$

สำหรับระบบสมการเชิงเส้น n ตัวแปร n สมการ ก็จะเป็นไปในทำนองเดียวกับระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปร

ตัวอย่างที่ 4.7 จงหาคำตอบของระบบสมการ $2x - y = 4$

$$3x + y = 5$$

วิธีทำ เขียนให้อยู่ในรูปสมการแมททริกซ์ : $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = +(2)(1) - (3)(-1)$$

$$\Delta = +(2) - (-3) = 5$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = +(4)(1) - (5)(-1)$$

$$\Delta x = +(4) - (-5) = 9$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = +(2)(5) - (3)(4)$$

$$\Delta y = +(10) - (12) = -2$$

$$\therefore \quad x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{9}{5}$$ ....<u>**ตอบ**</u>

$$\therefore \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-2}{5}$$ ....<u>**ตอบ**</u>

ตัวอย่างที่ 4.8 จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$x+y+z = 6$$

$$x+2y+3z = 14$$

$$x+4y+9z = 36$$

วิธีทำ เขียนให้อยู่ในรูปสมการแมททริกซ์ : $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ 36 \end{bmatrix}$

$$\Delta = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 1 \quad 1} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \\ 1 \quad 4 \quad 9 \end{vmatrix} \end{array}$$ เลือกแถวบนสุด

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = +(1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = +(1)\left[+(2)(9)-(4)(3)\right]-(1)\left[+(1)(9)-(1)(3)\right]+(1)\left[+(1)(4)-(1)(2)\right]$$

$$\Delta = +(18-12)-(9-3)+(4-2)$$

$$\Delta = +(6)-(6)+(2) = 2$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 36 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$ เลือกแถวบนสุด

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 36 & 4 & 9 \end{vmatrix} = +(6)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 36 & 9 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 14 & 2 \\ 36 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta x = +(6)\left[+(2)(9)-(4)(3)\right]-(1)\left[+(14)(9)-(36)(3)\right]+(1)\left[+(14)(4)-(36)(2)\right]$$

$$\Delta x = +(6)\left[+(18)-(12)\right]-(1)\left[+(126)-(108)\right]+(1)\left[+(56)-(72)\right]$$

$$\Delta x = +(6)(6)-(1)(18)+(1)(-16)$$

$$\Delta x = 36-18-16 = 2$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 1 & 36 & 9 \end{vmatrix}$$ เลือกแถวบนสุด

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 1 & 36 & 9 \end{vmatrix} = +(1)\begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 36 & 9 \end{vmatrix} - (6)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 1 & 14 \\ 1 & 36 \end{vmatrix}$$

$$\Delta y = +(1)\left[+(14)(9)-(36)(3)\right]-(6)\left[+(1)(9)-(1)(3)\right]+(1)\left[+(1)(36)-(1)(14)\right]$$

$$\Delta y = +(1)\left[+(126)-(108)\right]-(6)\left[+(9)-(3)\right]+(1)\left[+(36)-(14)\right]$$

$$\Delta y = +(1)(18)-(6)(6)+(1)(22)$$

$$\Delta y = 18-36+22 = 4$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 14 \\ 1 & 4 & 36 \end{vmatrix}$$ เลือกแถวบนสุด

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 14 \\ 1 & 4 & 36 \end{vmatrix} = +(1)\begin{vmatrix} 2 & 14 \\ 4 & 36 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 1 & 14 \\ 1 & 36 \end{vmatrix} + (6)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta z = +(1)\left[+(2)(36)-(4)(14)\right]-(1)\left[+(1)(36)-(1)(14)\right]+(6)\left[+(1)(4)-(1)(2)\right]$$

$$\Delta z = +(1)\left[+(72)-(56)\right]-(1)\left[+(36)-(14)\right]+(6)\left[+(4)-(2)\right]$$

$$\Delta z = +(1)(16)-(1)(22)+(6)(2)$$

$$\Delta z = 16-22+12 = 6$$

จะได้ $x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1$ ....**<u>ตอบ</u>**

$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{4}{2} = 2$ ....**<u>ตอบ</u>**

และ $z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{6}{2} = 3$ ....**<u>ตอบ</u>**

ตัวอย่างที่ 4.9 จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$3I_1 - 2I_2 + 0 = 10$$

$$-2I_1 + 9I_2 - 4I_3 = 0$$

$$-4I_2 + 9I_3 = 0$$

วิธีทำ เขียนให้อยู่ในรูปสมการแมททริกซ์ ได้ดังนี้ $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & -4 \\ 0 & -4 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Delta = \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} \boxed{3 \quad -2 \quad 0} \\ -2 \quad 9 \quad 4 \\ 0 \quad -4 \quad 9 \end{vmatrix} \end{array} \qquad \text{เลือกแถวบนสุด}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & -4 \\ 0 & -4 & 9 \end{vmatrix} = +(3)\begin{vmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} + (0)\begin{vmatrix} -2 & 9 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = +(3)\left[+(9)(9) - (-4)(-4)\right] - (-2)\left[+(-2)(9) - (0)(-4)\right] + (0)$$

$$\Delta = +(3)\left[+(81) - (16)\right] - (-2)\left[+(-18) - (0)\right] + (0)$$

$$\Delta = +(3)(65) + (2)(-18) + (0)$$

$$\Delta = 195 - 36 = 159$$

$$\Delta I_1 = \begin{vmatrix} + & \boxed{\begin{matrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} -2 \\ 9 \\ -4 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 4 \\ 9 \end{matrix} \end{vmatrix} \qquad \text{เลือกหลักที่ 1}$$

$$\Delta I_1 = \begin{vmatrix} 10 & -2 & 0 \\ 0 & 9 & -4 \\ 0 & -4 & 9 \end{vmatrix} = +(10)\begin{vmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} - (0)\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} + (0)\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 9 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta I_1 = +(10)\left[+(9)(9) - (-4)(-4)\right] - (0) + (0)$$

$$\Delta I_1 = +(10)\left[+(81) - (16)\right]$$

$$\Delta I_1 = (10)(65) = 650$$

$$\Delta I_2 = \begin{vmatrix} 3 & 10 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} \qquad \text{เลือกหลักที่ 2}$$

$$\Delta I_2 = \begin{vmatrix} 3 & 10 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -(10)\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} + (0)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} - (0)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta I_2 = -(10)\left[+(-2)(9) - (0)(-4)\right] + (0) - (0)$$

$$\Delta I_2 = -(10)(-18) + 0 - 0$$

$$\Delta I_2 = 180$$

$$\Delta I_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 10 \\ -2 & 9 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{เลือกหลักที่ 3}$$

$$\Delta I_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 10 \\ -2 & 9 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix} = +(10)\begin{vmatrix} -2 & 9 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} - (0)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} + (0)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\Delta I_3 = +(10)\big[+(-2)(-4)-(0)(9)\big]+(0)-(0)$$

$$\Delta I_3 = +(10)\big[+(8)-(0)\big]+(0)-(0)$$

$$\Delta I_3 = (10)(8) = 80$$

จะได้ $I_1 = \dfrac{\Delta I_1}{\Delta} = \dfrac{650}{159}$ ....**<u>ตอบ</u>**

$I_2 = \dfrac{\Delta I_2}{\Delta} = \dfrac{180}{159}$ ....**<u>ตอบ</u>**

และ $I_3 = \dfrac{\Delta I_3}{\Delta} = \dfrac{80}{159}$ ....**<u>ตอบ</u>**

ดีเทอร์มิแนนต์และแมททริกซ์ เป็นเครื่องมือที่ใช้ในการแก้ปัญหาในระบบสมการที่มีตัวแปรตั้งแต่ 2 ตัวแปรขึ้นไป โดยที่ค่าเดลต้า (Δ) ของแมททริกซ์นั้น ต้องไม่เป็น 0 การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ โดยการลดขนาด จะทำให้ช่วยลดความผิดพลาดลงได้ เพราะตัวเลขน้อยลง ถ้ามีสมาชิก ของแมททริกซ์ตัวใดตัวหนึ่งมีค่าเป็นศูนย์ การลดขนาดก็จะทำได้ง่ายขึ้น การแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยใช้กฎของคราเมอร์ เหมาะสำหรับงานในสาขาไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์ ช่วยแก้ปัญหาได้สะดวกและรวดเร็ว