การแปลงลาปลาซ

Laplace Transformation

Arnon Isaramongkolrak
Department of Electrical Engineering
Nakhon Pathom Rajabhat University

หัวข้อการเรียนการสอน

- การแปลงลาปลาซ
- คุณสมบัติของการแปลงลาปลาซ
- การแปลงลาปลาซของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
- การแปลงลาปลาซของอินทิกรัล
- ฟังก์ชันเป็นคาบ
- การแปลงลาปลาซของฟังก์ชันขั้นบันไดแบบหน่วย
- การแปลงลาปลาซผกผัน

หัวข้อการเรียนการสอน (ต่อ)

- คุณสมบัติของการแปลงลาปลาซผกผัน
- การแปลงลาปลาซผกผันของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
- การแปลงลาปลาซของแหล่งจ่าย
- การแปลงลาปลาซของ R L และ C

การแปลงลาปลาซ

นิยาม ให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งหาค่าได้เป็นจำนวนจริง ที่นิยามไว้สำหรับทุกค่าจริงบวกของ t ถ้า S เป็นตัวแปรจริงซึ่งทำให้ $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ หาค่าได้ เรียก $F(s)$ นี้ว่าผลการแปลงลาปลาซของ $f(t)$ เขียนแทนด้วย $L\{f(t)\}$

$$L\{f(t)\} = F(S)$$

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าผลการแปลงลาปลาซของ $L\{1\}$

$$L\{1\} = \int_0^\infty e^{-st} 1 dt$$

$$L\{1\} = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-st} 1 dt$$

$$L\{1\} = -\frac{1}{s} \lim_{R\to\infty} e^{-st} \Big]_0^R$$

$$L\{1\} = -\frac{1}{s} \lim_{R\to\infty} \left[e^{-sR} - 1 \right] = \frac{1}{s}$$

$$\boxed{L\{1\} = \frac{1}{s}}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าผลการแปลงลาปลาซของ $L\{e^{at}\}$

$$L\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st} \bullet e^{at} dt$$

$$L\{e^{at}\} = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-(s-a)t} 1 dt$$

$$L\{e^{at}\} = -\frac{1}{s-a} \lim_{R\to\infty} e^{-(s-a)t} \Big]_0^R$$

$$L\{e^{at}\} = -\frac{1}{s-a} \lim_{R\to\infty} \left[e^{-(s-a)R} - 1 \right];\ s > a$$

$$\boxed{L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าผลการแปลงลาปลาซของ $L\{\sin at\}$

$$L\{\sin at\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \bullet \sin at dt \quad \Rightarrow \quad L\{\sin at\} = \lim_{R\to\infty} \int_0^{R} e^{-st} \sin at dt$$

เนื่องจาก

$$\int e^{ax} \sin bx dx = e^{ax} \frac{\left(b\cos bx - a\sin bx\right)}{a^2+b^2}$$

ดังนั้น

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^{R} e^{-st} \sin at dt = \lim_{R\to\infty} e^{-st} \frac{\left(a\cos at + s\sin at\right)}{s^2+a^2}\Bigg]_0^R$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^{R} e^{-st} \sin at dt = \frac{1}{s^2+a^2} \lim_{R\to\infty} e^{-st}\left(a\cos aR + s\sin aR\right) - (a+0)$$

$$\boxed{L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}}$$

คุณสมบัติของการแปลงลาปลาซ

คุณสมบัติเชิงเส้น

$$\boxed{L\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} = c_1 L\{f(t)\} + c_2 L\{g(t)\}}$$

คุณสมบัติการเลื่อน

ถ้า $\boxed{L\{f(t)\} = F(s)}$ แล้ว $\boxed{L\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)}$

คุณสมบัติการคูณด้วย t^n

ถ้า $\boxed{L\{f(t)\} = F(s)}$ แล้ว $\boxed{L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \dfrac{d^n F(s)}{ds^n}}$

คุณสมบัติการหารด้วย t

ถ้า $\boxed{L\{f(t)\} = F(s)}$ แล้ว $\boxed{L\{\dfrac{f(t)}{t}\} = \int_s^{\infty} F(u)\,du}$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าผลการแปลงลาปลาซของ $L\{\sin(4t-3)\}$

จาก $$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$

$$L\{\sin(4t-3)\}=L\{\sin 4t\cos 3-\cos 4t\sin 3\}$$

$$L\{\sin(4t-3)\}=\cos 3L\{\sin 4t\}-\sin 3L\{\cos 4t\}$$

$$L\{\sin(4t-3)\}=\cos 3\left(\frac{4}{s^2+16}\right)-\sin 3\left(\frac{s}{s^2+16}\right)$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าผลการแปลงลาปลาซของ $L\{e^{3t}\cos 4t\}$

เนื่องจากว่า $$L\{\cos(4t)\} = \frac{s}{s^2+16} = F(s)$$

ดังนั้น $$L\{e^{3t}\cos(4t)\} = F(s-3)$$

$$L\{e^{3t}\cos(4t)\} = \frac{s-3}{(s-3)^2+16}$$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่าผลการแปลงลาปลาซของ $L\{t\cos t\}$

เนื่องจากว่า $$L\{\cos(t)\} = \frac{s}{s^2+1} = F(s)$$

ดังนั้น $$L\{t\cos(t)\} = (-1)^1 \frac{d\left(\frac{s}{s^2+1}\right)}{ds}$$

$$L\{t\cos(t)\} = (-1)\frac{(s^2+1)(1)-(s)(2s)}{(s^2+1)^2}$$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาค่าผลการแปลงลาปลาซของ $L\{\frac{\sin t}{t}\}$

เนื่องจากว่า $$L\{\sin(t)\} = \frac{1}{s^2+1} = F(s)$$

ดังนั้น $$L\{\frac{\sin(t)}{t}\} = \int_s^\infty F(u)du$$

$$L\{\frac{\sin(t)}{t}\} = \int_s^\infty \frac{1}{u^2+1}du$$

$$L\{\frac{\sin(t)}{t}\} = \lim_{R\to\infty}\int_s^R \frac{1}{u^2+1}du$$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาค่าผลการแปลงลาปลาซของ $L\{\frac{\sin t}{t}\}$

$$L\{\frac{\sin(t)}{t}\} = \lim_{R\to\infty}\int_s^R \frac{1}{u^2+1}du$$

$$L\{\frac{\sin(t)}{t}\} = \lim_{R\to\infty} \tan^{-1} u\Big]_s^R$$

$$L\{\frac{\sin(t)}{t}\} = \lim_{R\to\infty}\left(\tan^{-1} R - \tan^{-1} s\right)$$

$$L\{\frac{\sin(t)}{t}\} = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s$$

การแปลงลาปลาซของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

$$\boxed{L\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{'}(0) - s^{n-3} f^{''}(0) \ldots - f^{(n-1)}(0)}$$

$$\boxed{L\{f^{'}(t)\} = sF(s) - f(0)}$$

$$\boxed{L\{f^{''}(t)\} = s^2 F(s) - sf(0) - f^{'}(0)}$$

$$\boxed{L\{f^{'''}(t)\} = s^3 F(s) - s^2 f(0) - sf^{'}(0) - f^{''}(0)}$$

การแปลงลาปลาซของอินทิกรัล

ถ้า $\boxed{L\{f(t)\} = F(s)}$ แล้ว $\boxed{L\{\int_0^t f(t)dt\} = \frac{F(s)}{s}}$

ตัวอย่างที่ 8 จงหาค่าผลการแปลงลาปลาซของ $L\left\{e^{-3t}\int_0^t t\sin 2t\right\}$

ขั้นที่ 1 $$L\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2+4} = 2\left(s^2+4\right)^{-1}$$

ขั้นที่ 2 $$L\{t\sin 2t\} = (-1)^1(-2)\left(s^2+4\right)^{-2}(2s) = \frac{4s}{\left(s^2+4\right)^2}$$

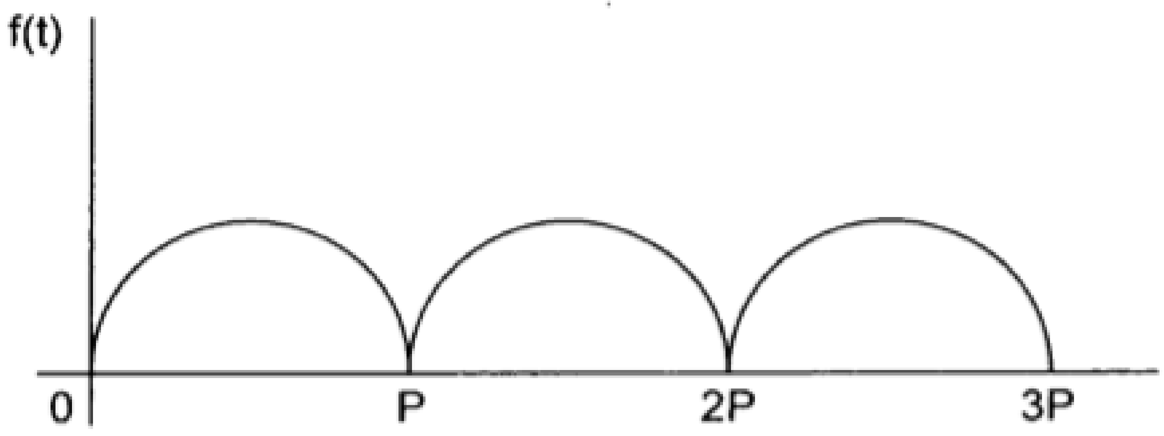
ขั้นที่ 3 $$L\left\{\int_0^t t\sin 2t\right\} = \left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{4s}{\left(s^2+4\right)^2}\right) = \frac{4}{\left(s^2+4\right)^2}$$

ขั้นที่ 4 $$L\left\{e^{-3t}\int_0^t t\sin 2t\right\} = \frac{4}{\left[(s+3)^2+4\right]^2}$$

ฟังก์ชันเป็นคาบ

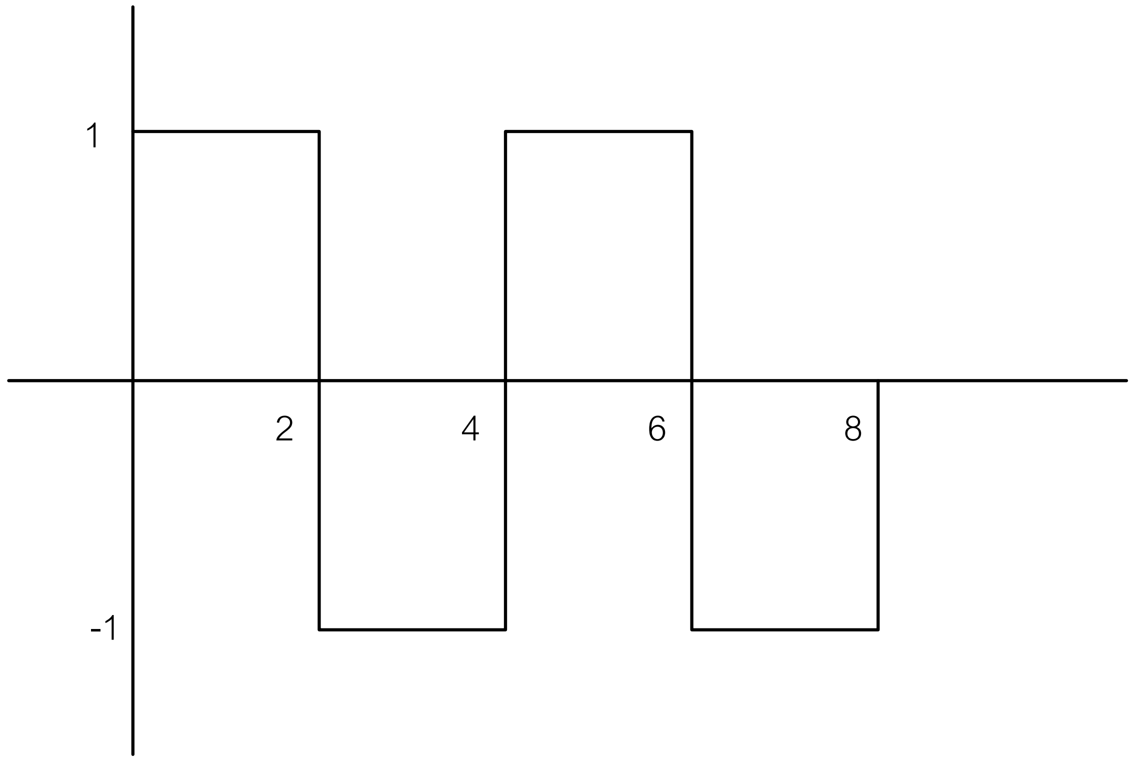
นิยาม ฟังก์ชัน $f(t)$ เป็นฟังก์ชันคาบ ก็ต่อเมื่อเป็นฟังก์ชันที่หาค่าได้ทุกค่าจริง t และถ้ามีเลขจำนวนบวก P ซึ่งทำให้ $f(t+P)=f(t)$ ทุกค่าจริง t

กราฟของฟังก์ชันเป็นคาบที่มีคาบเท่ากับ P จะมีลักษณะซ้ำกันในช่วงความยาว P



$$L\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-Ps}}\int_0^P e^{-Pst} f(t)dt$$

ตัวอย่างที่ 9 จงแปลงลาปลาซของ Square Wave



คาบ = 4

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0<t<2\\ -1, & 2<t<4\end{cases}$$

ตัวอย่างที่ 9 จงแปลงลาปลาซของ Square Wave

คาบ = 4

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0<t<2\\ -1, & 2<t<4\end{cases}$$

ดังนั้น

$$L\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-4s}}\int_0^4 e^{-4st}f(t)dt$$

$$L\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-4s}}\left[\int_0^2 e^{-4st}(1)dt+\int_2^4 e^{-4st}(-1)dt\right]$$

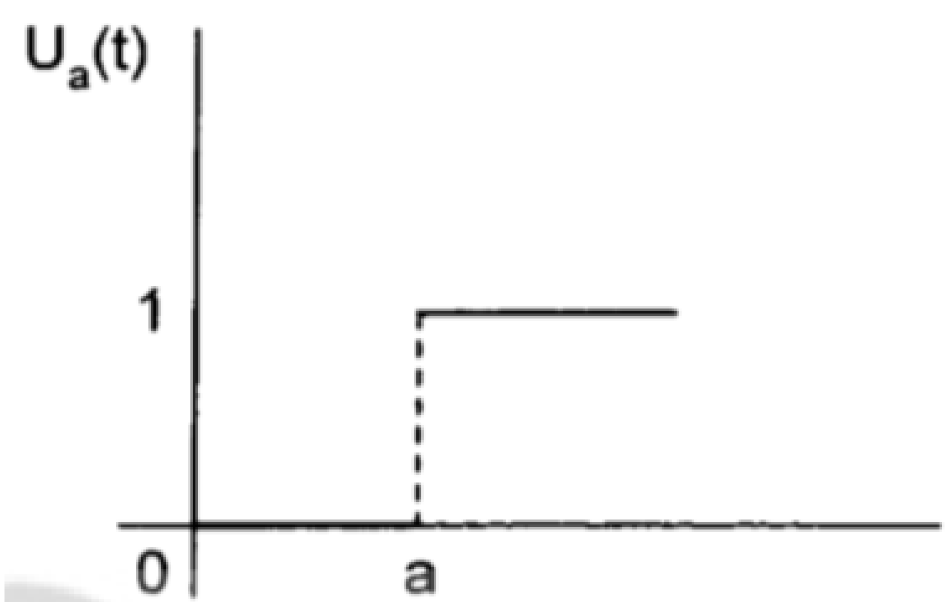
$$L\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-4s}}\left[\frac{1}{s}e^{-4st}\Big|_0^2-\frac{1}{s}e^{-4st}\Big|_2^4\right]$$

$$L\{f(t)\}=\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{1-e^{-4s}}\right)\left[\left(e^{-8s}-1\right)-\left(e^{-16s}-e^{-8s}\right)\right]$$

การแปลงลาปลาซของฟังก์ชันขั้นบันไดแบบหน่วย

ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย นิยามโดย

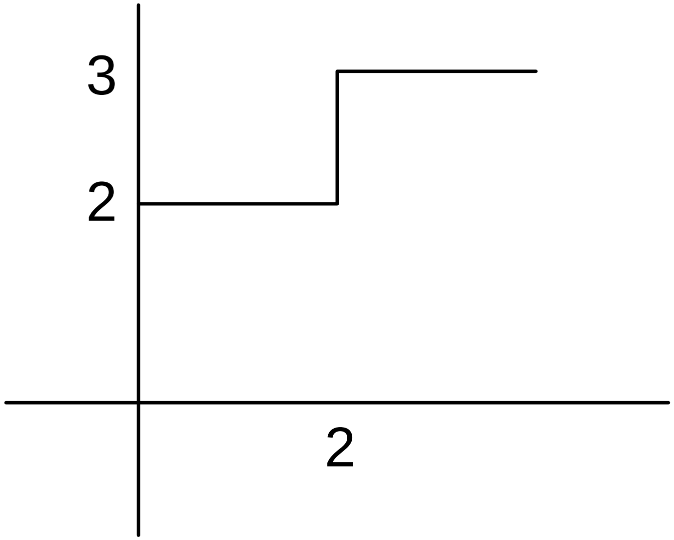
$$U(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases} \quad , a \geq 0$$



การแปลงลาปลาซของฟังก์ชันขั้นบันไดแบบหน่วย

ฟังก์ชันขั้นบันไดอื่นสามารถเขียนเป็นผลบวกของฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วยได้
เช่น

$$h(t) = \begin{cases} 2, & 0 \le t < 2 \\ 3, & 2 \le t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad h(t) = 2U_0(t) + U_2(t)$$



การแปลงลาปลาซของฟังก์ชันขั้นบันไดแบบหน่วย

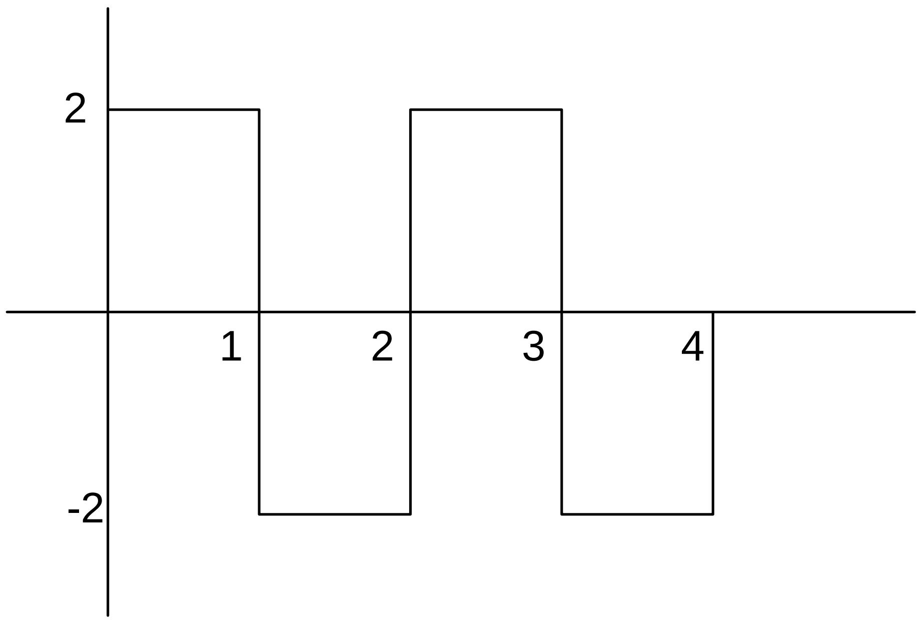
การเขียนฟังก์ชันขั้นบันไดจากฟังก์ชันที่กำหนดให้

$$f(t)=\begin{cases}5, & 0<t<2\\ 7, & 2<t<8\\ 10, & 8\le t\end{cases}$$

$$f(t)=5U_0(t)+2U_2(t)+3U_8(t)$$

$$7-5 \qquad 10-7$$

ตัวอย่างที่ 10 จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ จงเขียนให้อยู่ในเทอมของฟังก์ชันขั้นบันไดแบบหน่วยและหาผลการแปลงลาปลาซ



$$f(t)=\begin{cases} 2, & 0<t<1 \\ -2, & 1<t<2 \\ 2, & 2<t<3 \\ -2, & 3<t<4 \end{cases}$$

$$f(t)=2U_0(t)-4U_1(t)+4U_2(t)-4U_3(t)+\ldots$$

ตัวอย่างที่ 10 จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ จงเขียนให้อยู่ในเทอมของฟังก์ชันขั้นบันไดแบบหน่วยและหาผลการแปลงลาปลาซ

$$f(t) = 2U_0(t) - 4U_1(t) + 4U_2(t) - 4U_3(t) + \ldots$$

$$L\{f(t)\} = 2L\{U_0(t)\} - 4L\{U_1(t)\} + 4L\{U_2(t)\} - 4L\{U_3(t)\} + \ldots$$

$$L\{f(t)\} = \frac{2e^{-0s}}{s} - \frac{4e^{-1s}}{s} + \frac{4e^{-2s}}{s} - \frac{4e^{-3s}}{s} + \ldots$$

$$L\{f(t)\} = \frac{2}{s} - \frac{4}{s}\left(e^{-s} - e^{-2s} + e^{-3s} - \ldots\right) = \frac{2}{s} - \frac{4}{s}\left(\frac{e^{-s}}{1+e^{-s}}\right)$$

การแปลงลาปลาซผกผัน

นิยาม ให้ $L\{f(t)\} = F(s)$ จะกล่าวว่า $f(t)$ เป็นผลจากการแปลงผกผันลาปลาซของ $F(s)$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$

คุณสมบัติของการแปลงลาปลาซผกผัน

คุณสมบัติเชิงเส้น

$$L^{-1}\{c_1F(s) + c_2G(s)\} = c_1L^{-1}\{F(s)\} + c_2L^{-1}\{G(s)\}$$

ตัวอย่างที่ 11 จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผัน

$$L^{-1}\left\{\frac{4}{s^2}-\frac{2s}{s^2+9}+\frac{1}{s-3}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{4}{s^2}-\frac{2s}{s^2+9}+\frac{1}{s-3}\right\}=4L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}-2L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{4}{s^2}-\frac{2s}{s^2+9}+\frac{1}{s-3}\right\}=4t-2\cos 3t+e^{3t}$$

คุณสมบัติของการแปลงลาปลาซผกผัน

คุณสมบัติการเลื่อนแบบที่ 1

ถ้า $L^{-1}\left\{F(s)\right\} = f(t)$ แล้ว $L^{-1}\left\{F(s-a)\right\} = e^{at}L^{-1}\left\{F(s-a)\right\} = e^{at}f(t)$

ตัวอย่างที่ 12 จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผัน

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^3}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^3}\right\} = \frac{e^{2t}}{2!}L^{-1}\left\{\frac{(1)\,2!}{s^3}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^3}\right\} = e^{2t}t^2$$

คุณสมบัติของการแปลงลาปลาซผกผัน

คุณสมบัติการเลื่อนแบบที่ 2

ถ้า $L^{-1}\left\{F(s)\right\} = f(t)$ แล้ว $L^{-1}\left\{e^{-as}F(s)\right\} = f(t-a)\bullet U_a(t)$

ตัวอย่างที่ 13 จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผัน $L^{-1}\left\{\frac{se^{-\pi s}}{s^2+4}\right\}$

เนื่องจาก $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} = \cos 2t = f(t)$

ดังนั้น $L^{-1}\left\{e^{-\pi s}\bullet\frac{s}{s^2+4}\right\} = f(t-\pi)U_\pi(t)$

$$L^{-1}\left\{e^{-\pi s}\bullet\frac{s}{s^2+4}\right\} = \cos 2(t-\pi)U_\pi(t)$$

การแปลงลาปลาซผกผันของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ถ้า $L^{-1}\left\{F(s)\right\} = f(t)$ แล้ว $L^{-1}\left\{F^{(n)}(s)\right\} = (-1)^n t^n f(t)$ เมื่อ n = 1,2,3,...

จากทฤษฎีนี้จะเขียนว่า

$$f(t) = \frac{1}{(-1)^n} \bullet \frac{1}{t^n} L^{-1}\left\{F^{(n)}(s)\right\}$$

ถ้า n=1,

$$f(t) = (-1) \bullet \frac{1}{t} L^{-1}\left\{F^{'}(s)\right\}$$

ตัวอย่างที่ 14 จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผัน $L^{-1}\left\{\cot-1s\right\}$

$$L^{-1}\left\{\cot-1s\right\}=-\frac{1}{t}L^{-1}\left\{\frac{d\cot^{-1}s}{ds}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\cot-1s\right\}=-\frac{1}{t}L^{-1}\left\{\frac{-1}{1+s^{2}}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\cot-1s\right\}=\frac{1}{t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{2}+1}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\cot-1s\right\}=\frac{1}{t}\sin t$$

การแปลงลาปลาซของแหล่งจ่าย

แหล่งจ่ายที่เป็นค่าคงที่ หรือเป็นกระแส แรงดันไฟฟ้ากระแสตรง

$$v(t) = 12V \rightarrow L\{v(t)\} = V(s) = \frac{12}{s}$$

$$i(t) = 3A \rightarrow L\{i(t)\} = I(s) = \frac{3}{s}$$

แหล่งจ่ายที่เป็นฟังก์ชันไซนูซอยด์

$$v(t) = V_m \sin \omega t \rightarrow L\{v(t)\} = L\{V_m \sin \omega t\} = V(s) = \frac{V_m \omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$i(t) = I_m \cos \omega t \rightarrow L\{i(t)\} = L\{I_m \cos \omega t\} = I(s) = \frac{I_m s}{s^2 + \omega^2}$$

การแปลงลาปลาซของแหล่งจ่าย

แหล่งจ่ายที่เป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลคูณกับฟังก์ชันไซนูซอยด์

$$v(t) = Ae^{-at}\sin\beta t \rightarrow L\{v(t)\} = L\left\{Ae^{-at}\sin\beta t\right\} = V(s) = \frac{A\beta}{(s+a)^2 + \beta^2}$$

$$i(t) = Ae^{-at}\cos\beta t \rightarrow L\{i(t)\} = L\left\{Ae^{-at}\cos\beta t\right\} = I(s) = \frac{A(s+a)}{(s+a)^2 + \beta^2}$$

การแปลงลาปลาซของ R, L และ C

ตัวต้านทาน

แรงดันตกคร่อม

$$V_R(t) = Ri_R(t)$$

$$L\{V_R(t)\} = V_R(s) = RI_R(s)$$

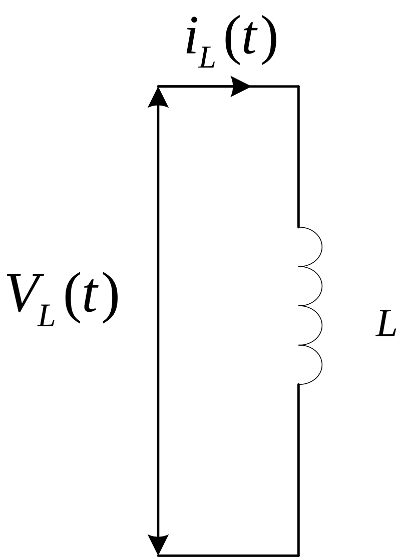
กระแสไหลผ่าน

$$i_R(t) = \frac{V_R(t)}{R}$$

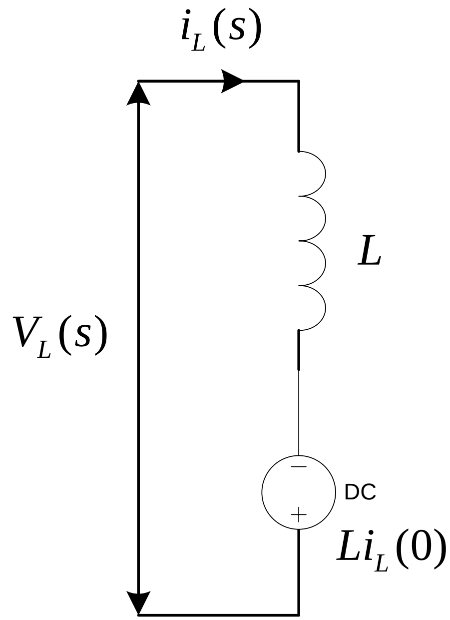
$$L\{i_R(t)\} = I_R(s) = \frac{V_R(s)}{R}$$

การแปลงลาปลาซของ R, L และ C

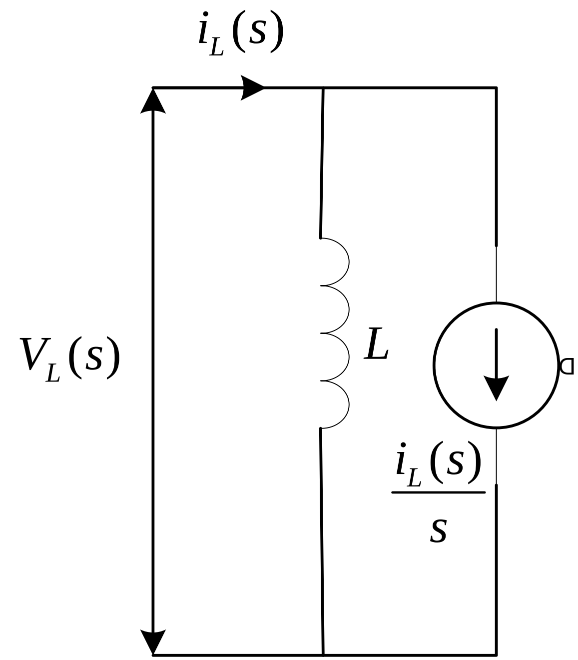
ตัวเหนี่ยวนำ



ตัวเหนี่ยวนำในโดเมนเวลา



ตัวเหนี่ยวนำในโดเมนความถี่มีค่าสภาวะเริ่มต้นในรูปแรงดัน



ตัวเหนี่ยวนำในโดเมนความถี่มีค่าสภาวะเริ่มต้นในรูปกระแส

แรงดันตกคร่อม

$$V_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

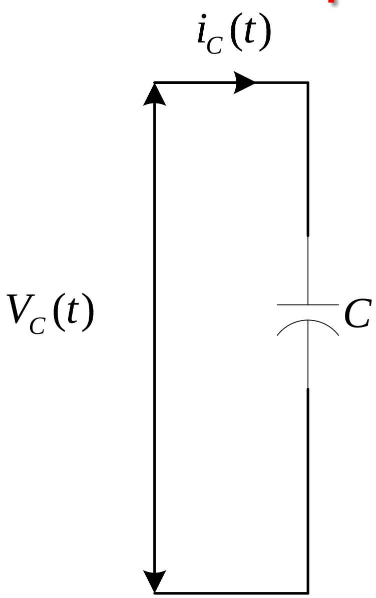
$$L\{V_L(t)\} = V_L(s) = sLI(s) - Li_L(0)$$

กระแสไหลผ่าน

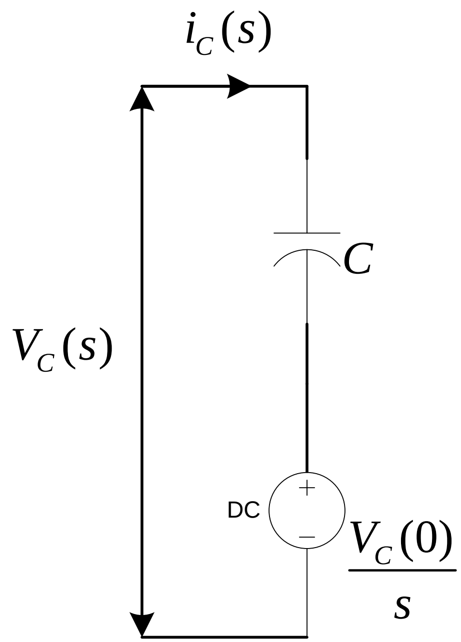
$$L\{i_L(t)\} = I_L(s) = \frac{V_L(s)}{sL} + \frac{i_L(0)}{s}$$

การแปลงลาปลาซของ R, L และ C

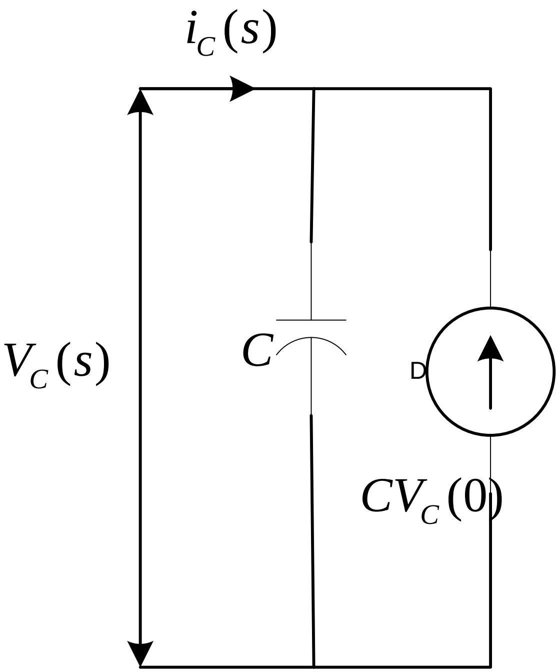
ตัวเก็บประจุ



ตัวเก็บประจุในโดเมนเวลา



ตัวเก็บประจุในโดเมนความถี่มีค่าสภาวะเริ่มต้นในรูปแรงดัน



ตัวเก็บประจุในโดเมนความถี่มีค่าสภาวะเริ่มต้นในรูปกระแส

แรงดันตกคร่อม

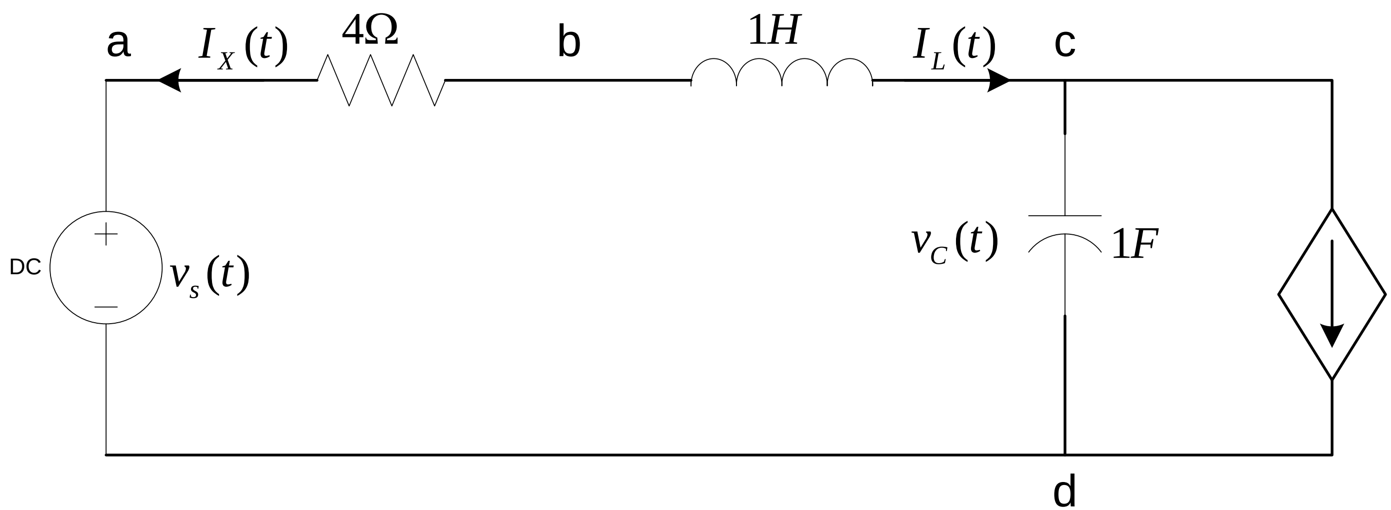
$$V_C(t) = \frac{1}{C}\int i_C(t)dt$$

$$L\{V_C(t)\} = V_C(s) = \frac{1}{sC} I_C(s) + \frac{v_C(0)}{s}$$

กระแสไหลผ่าน

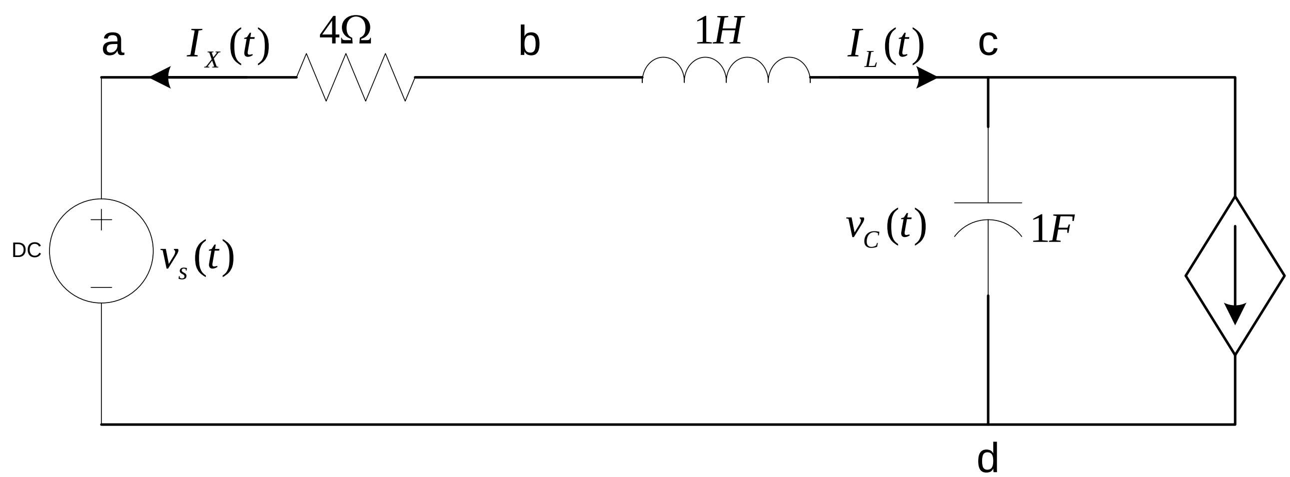
$$L\{i_C(t)\} = I_C(s) = sCV_C(s) - Cv_C(0)$$

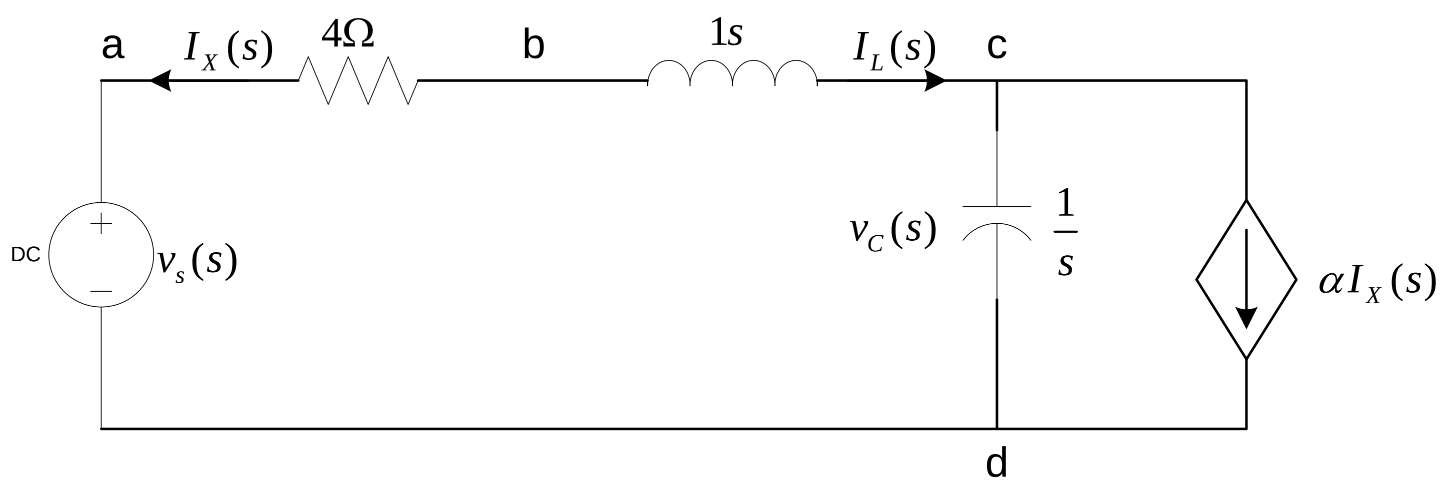
ตัวอย่างที่ 15 จงคำนวณหาค่า $V_C(t)$ โดยใช้การวิเคราะห์วงจรข่ายไฟฟ้าแบบกระแสลูปเมื่อ $V_s(t)=U(t)$ และสภาวะเริ่มต้นทั้งหมดเป็นศูนย์ และ $\alpha = 2$



ตัวอย่างที่ 15 จงคำนวณหาค่า $V_C(t)$ โดยใช้การวิเคราะห์วงจรข่ายไฟฟ้าแบบกระแสลูปเมื่อ $V_s(t)=U(t)$ และสภาวะเริ่มต้นทั้งหมดเป็นศูนย์ และ $\alpha=2$

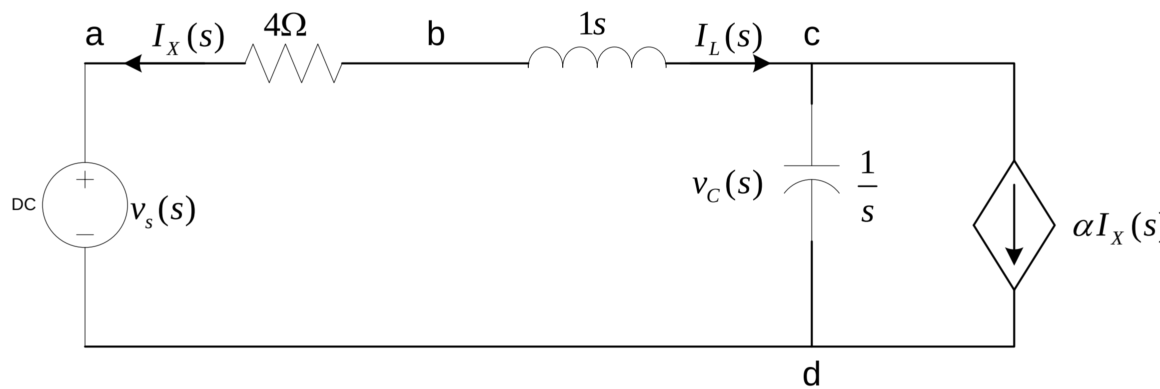
วิธีทำ





ตัวอย่างที่ 15 จงคำนวณหาค่า $V_C(t)$ โดยใช้การวิเคราะห์วงจรข่ายไฟฟ้าแบบกระแสลูปเมื่อ $V_s(t) = U(t)$ และสภาวะเริ่มต้นทั้งหมดเป็นศูนย์ และ $\alpha = 2$

วิธีทำ หาค่าแรงดันและกระแสในสาขาต่างๆ ของวงจรในรูปลาปลาซ



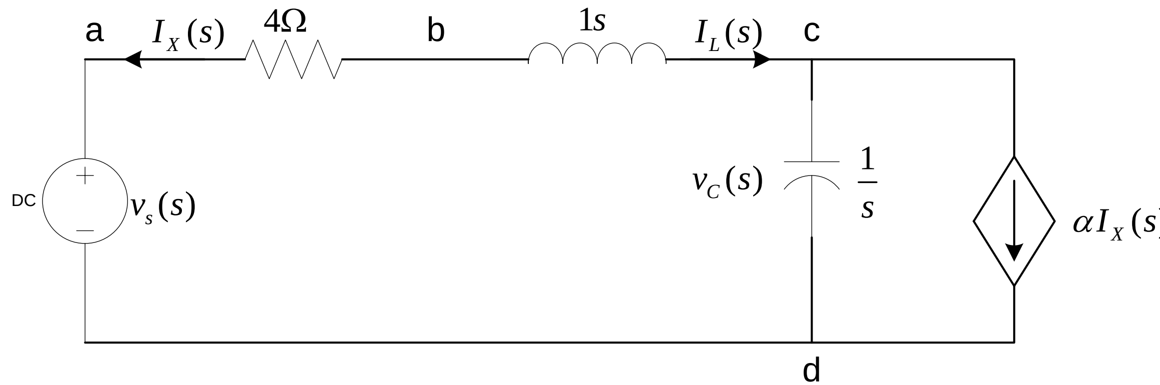
$$V_1 = V_s(t) \rightarrow V_1(s) = \frac{1}{s} \qquad V_2 = RI_2(t) \rightarrow V_2(s) = 4I_2(s)$$

$$V_3 = L\frac{dI_3(t)}{dt} \rightarrow V_3(s) = S(1)I_3(s) - (1)I(0) = SI_3(s)$$

$$V_4 = \frac{1}{C}\int_0^t I_4(t)dt \rightarrow V_4(s) = \frac{1}{(1)s}I_4(s) + \frac{V_C(0)}{s} = \frac{1}{s}I_4(s)$$

ตัวอย่างที่ 15 จงคำนวณหาค่า $V_C(t)$ โดยใช้การวิเคราะห์วงจรข่ายไฟฟ้าแบบกระแสลูปเมื่อ $V_s(t) = U(t)$ และสภาวะเริ่มต้นทั้งหมดเป็นศูนย์ และ $\alpha = 2$

วิธีทำ หาค่าแรงดันและกระแสในสาขาต่างๆ ของวงจรในรูปลาปลาซ

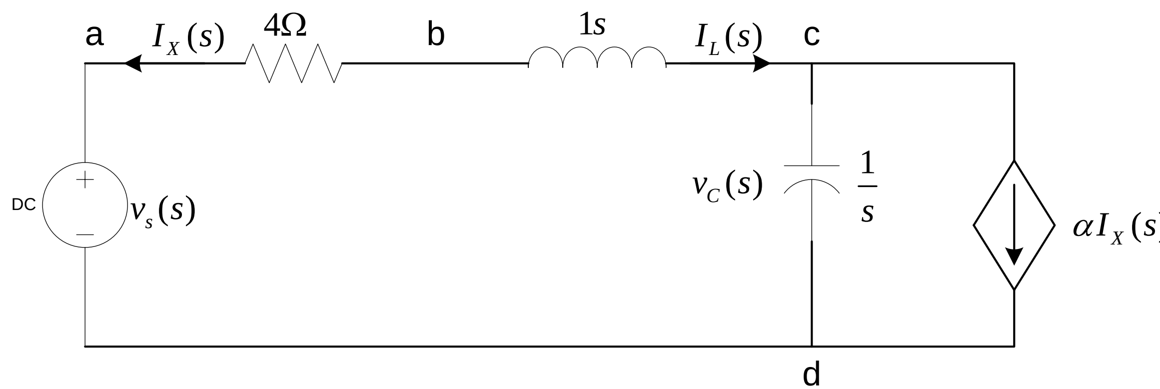


$I_5 = \alpha I_x$ เมื่อ $I_x = -I_2$ ดังนั้น $I_5 = -\alpha I_2 \rightarrow I_5(s) = -2I_2(s)$

$I_2 = I_3 \rightarrow I_2(s) = I_3(s)$ $\qquad$ $I_4 = I_2 - I_5 \rightarrow I_4(s) = 3I_3(s)$

ตัวอย่างที่ 15 จงคำนวณหาค่า $V_C(t)$ โดยใช้การวิเคราะห์วงจรข่ายไฟฟ้าแบบกระแสลูปเมื่อ $V_s(t) = U(t)$ และสภาวะเริ่มต้นทั้งหมดเป็นศูนย์ และ $\alpha = 2$

วิธีทำ แทนค่าที่ได้ลงในสมการลูปพื้นฐานจะได้



$$4I_3(s) + sI_3(s) + \frac{1}{s}\left(3I_3(s)\right) = \frac{1}{s}$$

$$I_3(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 3} = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$$

ตัวอย่างที่ 15 จงคำนวณหาค่า $V_C(t)$ โดยใช้การวิเคราะห์วงจรข่ายไฟฟ้าแบบกระแสลูปเมื่อ $V_s(t)=U(t)$ และสภาวะเริ่มต้นทั้งหมดเป็นศูนย์ และ $\alpha = 2$

วิธีทำ อาศัยการแปลงลาปลาซผกผันแบบเศษส่วนย่อยจะได้ว่า

$$I_3(s)=\frac{1}{(s+1)(s+3)} \Rightarrow L^{-1}\{I_3(s)\}=\frac{A}{(s+1)}+\frac{B}{(s+3)}$$

$$L^{-1}\{I_3(s)\}=\frac{A(s+3)+B(s+1)}{(s+1)(s+3)}$$

$$\frac{1}{(s+1)(s+3)}=\frac{A(s+3)+B(s+1)}{(s+1)(s+3)}$$

ตัวอย่างที่ 15 จงคำนวณหาค่า $V_C(t)$ โดยใช้การวิเคราะห์วงจรข่ายไฟฟ้าแบบกระแสลูปเมื่อ $V_s(t) = U(t)$ และสภาวะเริ่มต้นทั้งหมดเป็นศูนย์ และ $\alpha = 2$

วิธีทำ อาศัยการแปลงลาปลาซผกผันแบบเศษส่วนย่อยจะได้ว่า

$$1 = A(s+3) + B(s+1)$$

แทนค่า $s = -3$ จะได้ $1 = B(-2) \rightarrow B = \dfrac{-1}{2}$

แทนค่า $s = -1$ จะได้ $1 = A(2) \rightarrow A = \dfrac{1}{2}$

$$L^{-1}\{I_3(s)\} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+3)} \rightarrow \frac{\frac{1}{2}}{(s+1)} + \frac{\frac{-1}{2}}{(s+3)}$$

ตัวอย่างที่ 15 จงคำนวณหาค่า $V_C(t)$ โดยใช้การวิเคราะห์วงจรข่ายไฟฟ้าแบบกระแสลูปเมื่อ $V_s(t) = U(t)$ และสภาวะเริ่มต้นทั้งหมดเป็นศูนย์ และ $\alpha = 2$

วิธีทำ อาศัยการแปลงลาปลาซผกผันแบบเศษส่วนย่อยจะได้ว่า

$$L^{-1}\{I_3(s)\} = \frac{\frac{1}{2}}{(s+1)} + \frac{\frac{-1}{2}}{(s+3)}$$

$$I_3(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}\ A$$

จาก $I_4 = 3I_3$ ดังนั้น $$I_4(t) = \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-3t}\ A$$

ตัวอย่างที่ 15 จงคำนวณหาค่า $V_C(t)$ โดยใช้การวิเคราะห์วงจรข่ายไฟฟ้าแบบกระแสลูปเมื่อ $V_s(t) = U(t)$ และสภาวะเริ่มต้นทั้งหมดเป็นศูนย์ และ $\alpha = 2$

วิธีทำ คำนวณหาค่า $V_C(t)$ จะได้ว่า

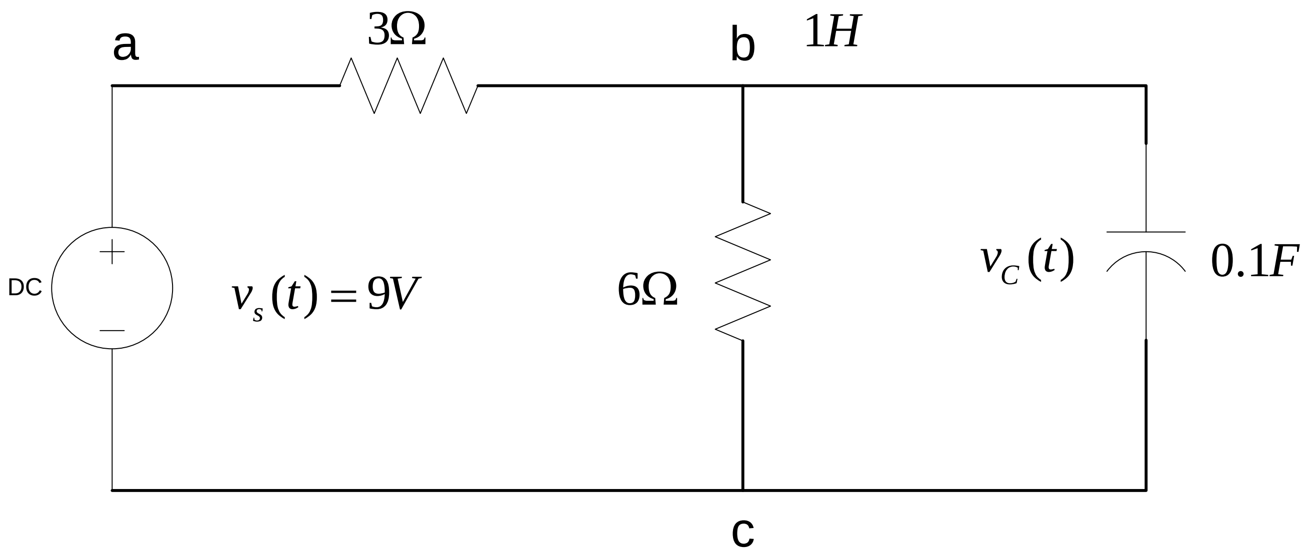
$$V_4(t) = \frac{1}{C}\int_0^t I_4(t)dt = \int_0^t \left(\frac{3}{2}e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-3t}\right)dt$$

$$V_4(t) = \left(-\frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}\right)\Bigg|_0^t$$

$$V_4(t) = \left(-\frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}\right) - \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$V_4(t) = V_C(t) = 1 - \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t} \ V$$

โจทย์ปัญหา 1 จงคำนวณหาค่า $V_C(t)$ โดยใช้การวิเคราะห์วงจรข่ายไฟฟ้าแบบแรงดันโนดเมื่อ $V_s(t) = 9V$ และสภาวะเริ่มต้น $V_C(0) = 2V$

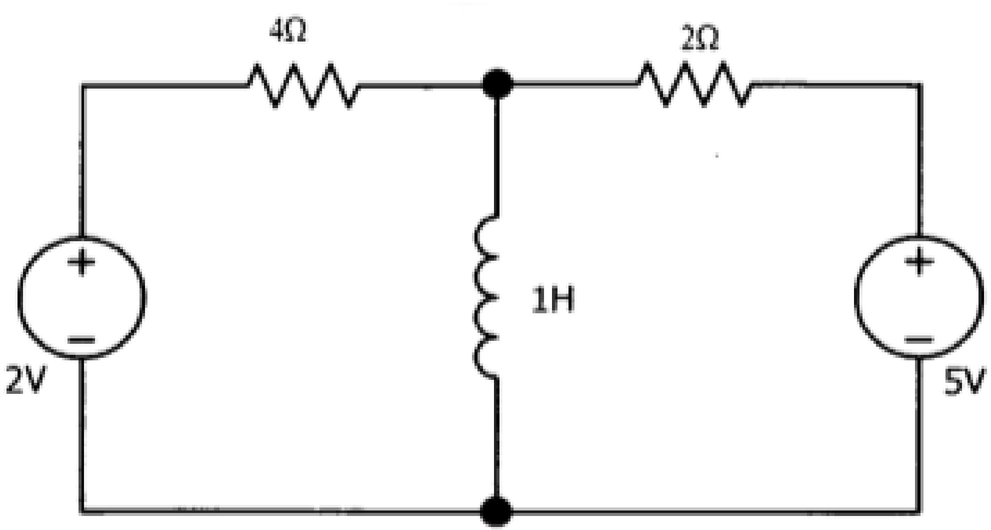


ตอบ $V_C(t) = 6 - 4e^{-5t}\ V$

การบ้าน 1 จงแปลงลาปลาซผกผันโดยใช้วิธีเศษส่วนย่อย

1.1) $L^{-1}\left\{\dfrac{s^2+s+1}{s^3+8s^2+15s}\right\}$ 1.2) $L^{-1}\left\{\dfrac{5}{(s+1)^2}\right\}$

การบ้าน 2 จงคำนวณหาค่ากระแสไหลผ่านตัวต้านทาน 2 โอห์ม โดยใช้การวิเคราะห์วงจรข่ายไฟฟ้าแบบกระแสเมช และสภาวะเริ่มต้นทั้งหมดในวงจรเป็นศูนย์



จบเนื้อหาการแปลงลาปลาซ