อนุกรมฟูเรียร์

Fourier Series

การแทนฟังก์ชันด้วยอนุกรม

อนุกรมฟูเรียร์ $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

อนุกรมเทย์เลอร์ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$

ตัวอย่างอนุกรมเทย์เลอร์

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

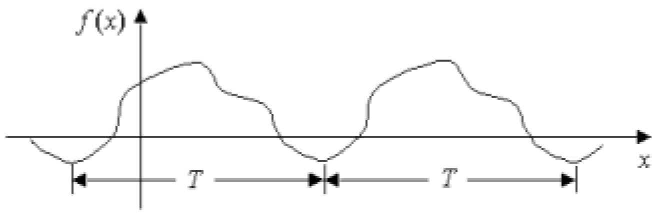
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

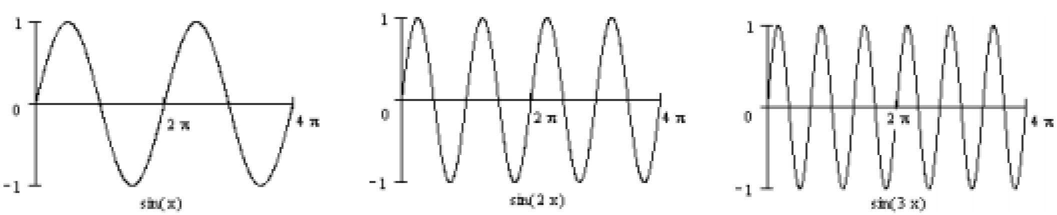
10.1 ฟังก์ชันเป็นคาบ (Periodic Functions)

บทนิยามที่ 10.1.1 $f(x)$ **เป็นฟังก์ชันเป็นคาบ** ก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริงบวก T ที่ทำให้ $f(x+T)=f(x)$ สำหรับทุก x และเรียก T ว่า **คาบ** (period) ของ $f(x)$

กราฟของฟังก์ชันเป็นคาบที่มีคาบเท่ากับ T จะมีลักษณะซ้ำกันในช่วงความยาว T



ฟังก์ชัน sin nx และ cos nx มีคาบเท่ากับ 2π



$\sin(x+2\pi)=\sin x$

$\sin 2(x+2\pi)=\sin(2x+4\pi)=\sin 2x$

$\sin 3(x+2\pi)=\sin(3x+6\pi)=\sin 3x$

กรณีทั่วไป $\sin n(x+2\pi)=\sin(nx+2n\pi)=\sin nx$

และ $\cos n(x+2\pi)=\cos(nx+2n\pi)=\cos nx$

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$
เป็นฟังก์ชันซึ่งมีคาบเท่ากับ 2π

บทนิยาม

1. $f(x)$ เป็น **ฟังก์ชันคู่** (even function)
   ก็ต่อเมื่อ $f(-x) = f(x)$ ทุกค่า x

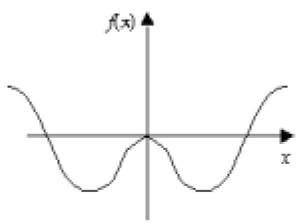
ตัวอย่าง $f(x) = x^2$

$f(x) = \cos(nx)$

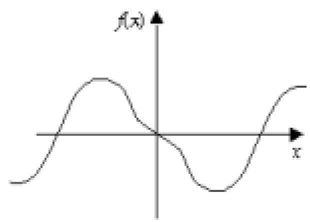
2. $f(x)$ เป็น **ฟังก์ชันคี่** (odd function)
   ก็ต่อเมื่อ $f(-x) = -f(x)$ ทุกค่า x

ตัวอย่าง $f(x) = x$

$f(x) = \sin(nx)$



ฟังก์ชันคู่



ฟังก์ชันคี่

สมบัติบางประการของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่

1. (ฟังก์ชันคู่)(ฟังก์ชันคู่) = ฟังก์ชันคู่
2. (ฟังก์ชันคู่)(ฟังก์ชันคี่) = ฟังก์ชันคี่
3. (ฟังก์ชันคี่)(ฟังก์ชันคี่) = ฟังก์ชันคู่
4. (ฟังก์ชันคู่)±(ฟังก์ชันคู่) = ฟังก์ชันคู่
5. (ฟังก์ชันคี่)±(ฟังก์ชันคี่) = ฟังก์ชันคี่
6. ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคู่แล้ว $\int_{-c}^{c} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{c} f(x)\,dx$
7. ถ้า $g(x)$ เป็นฟังก์ชันคี่แล้ว $\int_{-c}^{c} g(x)\,dx = 0$
8. ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคี่

แล้ว $f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}$ เป็นฟังก์ชันคู่ $f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}$ เป็นฟังก์ชันคี่

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0$$

9. ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคู่

แล้ว $b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

10.3 อนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันที่มีคาบ 2π

(Fourier Series of Functions with Period of 2π)

ฟังก์ชันเป็นคาบ $f(x)$ มีคาบเท่ากับ 2π

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

เรียกว่า **อนุกรมฟูเรียร์ ของ ฟังก์ชัน $f(x)$**

เทียบกับเซต $\{1, \cos nx, \sin nx \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad n = 1, 2, \ldots \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad n = 1, 2, \ldots \end{aligned}}$$

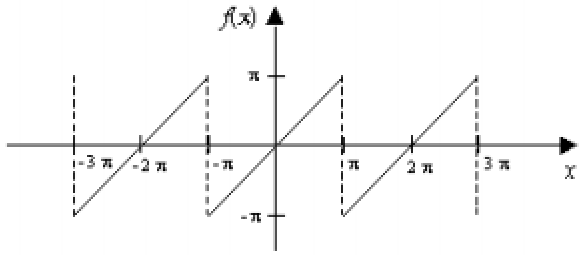
$a_0, a_1, a_2, \ldots$ และ $b_1, b_2, b_3, \ldots$

เรียกว่า **สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์** (Fourier coefficients) ของ $f(x)$

ตัวอย่างที่ 10.3.1 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย

$f(x) = x, \ -\pi < x < \pi$ และ $f(x + 2\pi) = f(x)$

วิธีทำ



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos nx - \frac{\pi}{n}\cos nx\right)$$

$$= -\frac{2\cos n\pi}{n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

อนุกรมฟูเรียร์ของ $f(x)$ คือ

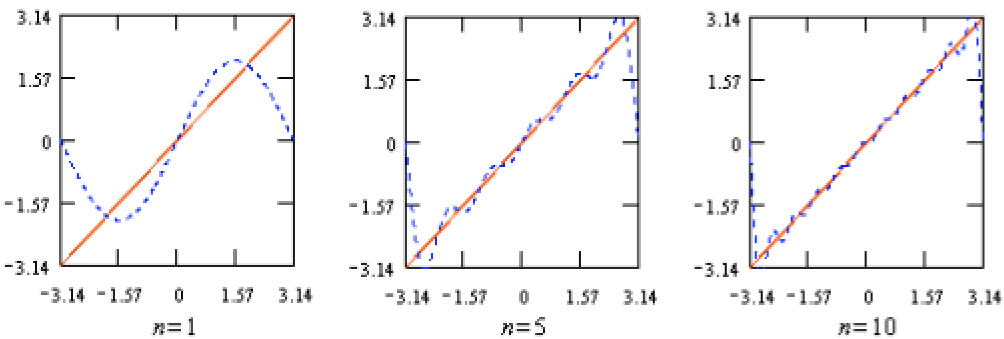
$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

$$= 2\{\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots\}$$

กราฟของผลบวกย่อยของอนุกรมคือ $2\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$

ในช่วง $-\pi < x < \pi$ โดยใช้จำนวนพจน์เป็น $N = 1,\ N = 5$

และ $N = 10$



จะเห็นว่ากราฟของอนุกรมมีลักษณะใกล้เคียงกับกราฟของ

$f(x) = x, -\pi < x < \pi$ มากยิ่งขึ้นตามจำนวนพจน์ของอนุกรมที่

เพิ่มขึ้น

ข้อสังเกต

ที่จุด $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$

ซึ่งฟังก์ชัน $f(x)$ หาค่าได้และต่อเนื่อง

อนุกรมฟูเรียร์ $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$ ลู่เข้าสู่ 0

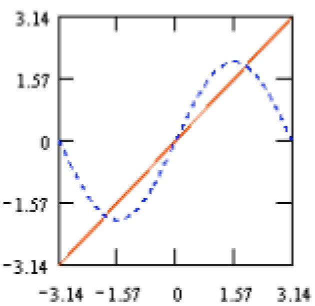
ซึ่งมีค่าเท่ากับ $f(x)$ ที่จุด x เหล่านี้

ที่จุด $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$ ฟังก์ชัน $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องและไม่นิยาม

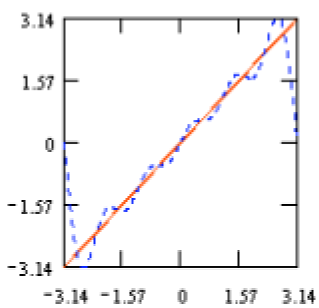
อนุกรมฟูเรียร์ $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$ ลู่เข้าสู่ 0

ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}[f(x^{+}) + f(x^{-})]$ ณ จุด x เหล่านี้

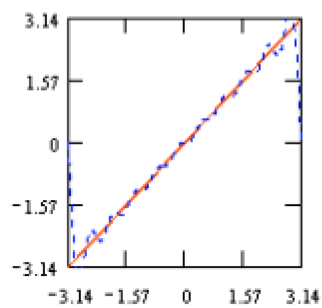
หมายเหตุ $f(x_0^{+}) = \lim\limits_{x \to x_0^{+}} f(x)$ และ $f(x_0^{-}) = \lim\limits_{x \to x_0^{-}} f(x)$



n=1



n=5



n=10

ตัวอย่างที่ 10.3.2 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย

$f(x)=\begin{cases}1, & -\pi<x<0\\ 2, & 0<x<\pi\end{cases}$ และ $f(x+2\pi)=f(x)$

วิธีทำ $a_0=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}1\,dx+\int_{0}^{\pi}2\,dx\right]=3$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi}2\cos nx\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{2}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}\right)=0,\ n=1,2,3,\ldots$$

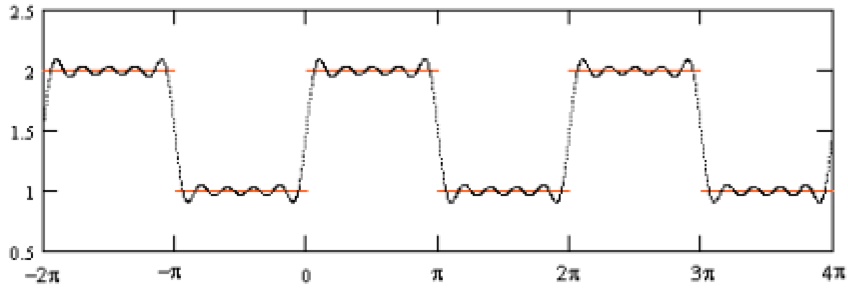
$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx+\int_{0}^{\pi}2\sin nx\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{2}{n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}\right)$$

$$=\frac{1-\cos n\pi}{n\pi}=\frac{1-(-1)^n}{n\pi},\ n=1,2,3,\ldots$$

อนุกรมฟูเรียร์ของ $f(x)$ คือ $\frac{3}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin nx$

$$=\frac{3}{2}+\frac{2}{\pi}\{\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots\}$$

N = 10 

ข้อสังเกต

ที่ $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ ซึ่งฟังก์ชัน $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องและไม่นิยาม

อนุกรมฟูเรียร์ $\frac{3}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n}\sin nx$ ลู่เข้าสู่ $\frac{3}{2}$

ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$ ณ จุด x เหล่านี้

ที่จุด $x = \frac{\pi}{2}$ ซึ่งเป็นจุดที่ฟังก์ชัน $f(x)$ ต่อเนื่อง

สมมติว่าอนุกรมฟูเรียร์

$\frac{3}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n}\sin nx$ ลู่เข้าสู่ค่า $f(\frac{\pi}{2})$

จะได้

$$
\begin{aligned}
f(\tfrac{\pi}{2}) &= \frac{3}{2} + \frac{2}{\pi}\{\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi}{2} + \frac{1}{7}\sin\frac{7\pi}{2} + \cdots\} \\
2 &= \frac{3}{2} + \frac{2}{\pi}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots) \\
\frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots
\end{aligned}
$$

บทนิยามที่ 10.3.1

ฟังก์ชัน $f(x)$ **ต่อเนื่องเป็นช่วง** (piecewise continuous) บนช่วง I ใด ๆ ก็ต่อเมื่อ

เราสามารถแบ่งช่วง I นี้ออกเป็นช่วงย่อย ๆ ได้เป็นจำนวนอันตะ และ $f(x)$ ต่อเนื่องภายในแต่ละช่วงย่อยนี้

สำหรับ x_0 ซึ่งเป็นจุดปลายของช่วงย่อยที่ฟังก์ชัน $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องนั้น จะต้องหาลิมิตซ้าย $f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

และลิมิตขวา $f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ ได้

บทนิยามที่ 10.3.2 $f(x)$ เป็นฟังก์ชัน **ปรับเรียบเป็นช่วง** (piecewise smooth) บนช่วง I ใด ๆ ก็ต่อเมื่อ

$f(x)$ และ $f'(x)$ ต่อเนื่องเป็นช่วงบนช่วง I นั้น

ทฤษฎีบทที่ 10.3.1 ทฤษฎีบทการลู่เข้าของอนุกรมฟูเรียร์

ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเป็นคาบที่มีคาบเท่ากับ 2π

และ $f(x)$ ปรับเรียบเป็นช่วงบน $[-\pi, \pi]$

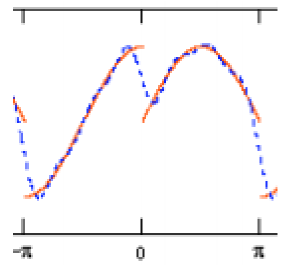
แล้ว

อนุกรมฟูเรียร์ของ $f(x)$ ลู่เข้าสู่ $f(x)$ ที่ทุกจุดซึ่ง $f(x)$ ต่อเนื่อง และลู่เข้าสู่ค่าเฉลี่ยของลิมิตซ้ายและลิมิตขวาของ $f(x)$ ที่ทุกจุดซึ่ง $f(x)$ ไม่ต่อเนื่อง

ตัวอย่างที่ 10.3.3 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & -\pi<x<0\\ \sin x, & 0<x<\pi\end{cases} \text{ และ } f(x+2\pi)=f(x)$$

วิธีทำ



$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\cos x\,dx+\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\{[\sin x]_{-\pi}^{0}-[\cos x]_{0}^{\pi}\}$$

$$=\frac{2}{\pi}$$

$$a_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos^2 x\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin x\cos x\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\sin 2x\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_{0}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2}$$

$n \neq 1$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \cos x\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin x\cos nx\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \{\frac{1}{2}\cos(1-n)x + \frac{1}{2}\cos(1+n)x\}\,dx \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \{\frac{1}{2}\sin(1+n)x + \frac{1}{2}\sin(1-n)x\}\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(1-n)x}{2(1-n)} + \frac{\sin(1+n)x}{2(1+n)}\right]_{-\pi}^{0} \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(1+n)x}{2(1+n)} - \frac{\cos(1-n)x}{2(1-n)}\right]_{0}^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\{\frac{1-\cos(n+1)\pi}{2(n+1)} - \frac{1-\cos(n-1)\pi}{2(n-1)}\} \\
&= \frac{1-(-1)^{n+1}}{2(n+1)\pi} - \frac{1-(-1)^{n-1}}{2(n-1)\pi} \\
&= \begin{cases} 0, & n = 3, 5, 7, \dots \\ -\dfrac{2}{(n^2-1)\pi}, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \cos x \sin x \, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin^2 x \, dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} \sin 2x \, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} \, dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right]_{0}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$n \neq 1$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \cos x \sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin x \sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \{\frac{1}{2}\sin(1+n)x - \frac{1}{2}\sin(1-n)x\}\,dx$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \{\frac{1}{2}\cos(1-n)x + \frac{1}{2}\cos(1+n)x\}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(1+n)x}{2(1+n)} + \frac{\cos(1-n)x}{2(1-n)}\right]_{-\pi}^{0}$$

$$+ \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(1-n)x}{2(1-n)} - \frac{\sin(1+n)x}{2(1+n)}\right]_{0}^{\pi} \qquad , \ n \neq 1$$

$$= \frac{1}{\pi}\{\frac{\cos(n+1)\pi - 1}{2(n+1)} + \frac{\cos(n-1)\pi - 1}{2(n-1)}\}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} - 1}{2(n+1)\pi} + \frac{(-1)^{n-1} - 1}{2(n-1)\pi}$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 3, 5, 7, \ldots \\ -\dfrac{2n}{(n^2 - 1)\pi}, & n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

อนุกรมฟูเรียร์ของ $f(x)$ คือ

$$\frac{1}{\pi}+\frac{\cos x}{2}+\frac{2}{\pi}(\frac{\cos 2x}{3}+\frac{\cos 4x}{15}+\frac{\cos 6x}{35}+\cdots)$$
$$+\frac{\sin x}{2}-\frac{2}{\pi}(\frac{2\sin 2x}{3}+\frac{4\sin 4x}{15}+\frac{6\sin 6x}{35}+\cdots)$$

ที่ $x=0$ ซึ่งเป็นจุดที่ $f(x)$ ไม่ต่อเนื่อง

จะได้

$$\frac{1}{2}\{f(0^+)+f(0^-)\} = \frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\cdots)$$
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\cdots)$$
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\cdots$$

เพราะฉะนั้น

ผลบวกของอนุกรม $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\cdots = \frac{1}{2}$

ที่ $x=\frac{\pi}{2}$ ซึ่งเป็นจุดที่ $f(x)$ ต่อเนื่อง จะได้

$$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\pi}+0-\frac{2}{\pi}(-\frac{1}{3}+\frac{1}{15}-\frac{1}{35}+\cdots)+\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\cdot 0$$
$$1 = \frac{1}{\pi}-\frac{2}{\pi}(-\frac{1}{3}+\frac{1}{15}-\frac{1}{35}+\cdots)+\frac{1}{2}$$
$$\frac{\pi-2}{4} = \frac{1}{3}-\frac{1}{15}+\frac{1}{35}-\frac{1}{63}+\cdots$$
$$\frac{\pi-2}{4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)(2n+1)}$$

กราฟของ $f(x)$

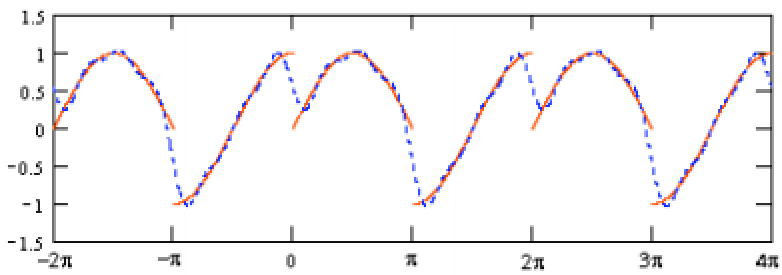
$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & -\pi<x<0\\ \sin x, & 0<x<\pi\end{cases}$$

เปรียบเทียบกับผลบวกย่อยของอนุกรมฟูเรียร์ของ $f(x)$

ถึงพจน์ $n=6$

$$\frac{1}{\pi}+\frac{\cos x}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{3}+\frac{\cos 4x}{15}+\frac{\cos 6x}{35}\right)$$

$$+\frac{\sin x}{2}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{2\sin 2x}{3}+\frac{4\sin 4x}{15}+\frac{6\sin 6x}{35}\right)$$



10.4 อนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันที่มีคาบ 2L

ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีคาบเท่ากับ 2L

ให้ $x = \frac{Lt}{\pi}$ ดังนั้นที่ $x = -L, t = -\pi$

และที่ $x = L, t = \pi$ ซึ่งจะได้ว่า $g(t) = f(\frac{Lt}{\pi})$

เป็นฟังก์ชันเป็นคาบที่มีคาบเท่ากับ 2π

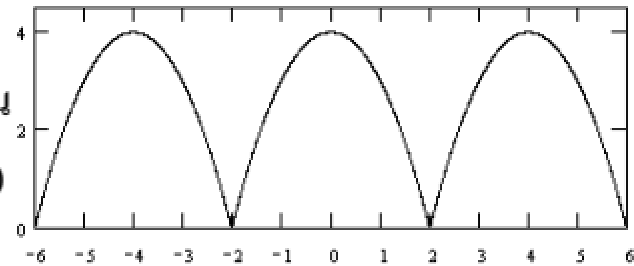
อนุกรมฟูเรียร์ของ $g(t)$ บนช่วง $[-\pi, \pi]$ คือ

$$\left.\begin{aligned} &\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \\ \text{โดยที่ } &a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos nt \, dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ &b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin nt \, dt, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}\right\}$$

สรุป อนุกรมฟูเรียร์ของ $f(x)$ บนช่วง $[-L, L]$ คือ

$$\boxed{\left.\begin{aligned} &\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}) \\ \text{โดยที่ } &a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ &b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}\right\}}$$

ตัวอย่างที่ 10.4.1 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน $f(x) = 4 - x^2, \ -2 \le x \le 2$ และ $f(x+4) = f(x)$



วิธีทำ

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(4 - x^2)\,dx = \frac{1}{2}\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{16}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} (4 - x^2)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{8}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{2}$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{8x}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2} + \left(\frac{2x^2}{n\pi} - \frac{16}{n^3\pi^3}\right)\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_{-2}^{2}$$

$$= -\frac{16}{n^2\pi^2}\cos n\pi = \frac{16(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}, \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

เพราะว่า $f(x)\sin\frac{n\pi\pi}{2}$ เป็นฟังก์ชันคี่

เพราะฉะนั้น $b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi\pi}{2}\,dx = 0, \ n = 1, 2, 3, \ldots$

อนุกรมฟูเรียร์ของ $f(x)$ คือ

$$\frac{8}{3} + \frac{16}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2} - \frac{1}{4^2}\cos\frac{4\pi x}{2} + \cdots\right)$$

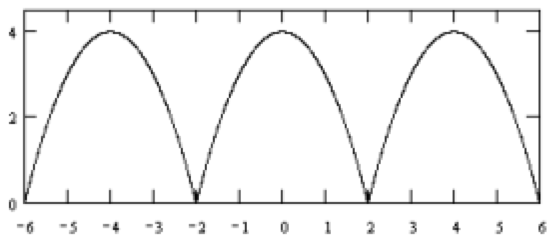
ที่ $x = 0$ จะได้

$$f(0) = 4 = \frac{8}{3} + \frac{16}{\pi^2}\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots\right)$$

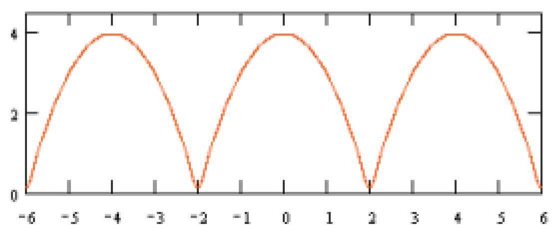
$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

หรือ $$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}$$

(ก.)



(ข.)



(ก) กราฟของ $f(x)$

และ (ข) กราฟของผลบวกย่อยของอนุกรมฟูเรียร์ของ $f(x)$ ถึง

พจน์ $n = 10$

ตัวอย่างที่ 10.4.2 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน

$f(x)=\begin{cases}3, & -1<x<0\\ x, & 0<x<1\end{cases}$ และ $f(x+2)=f(x)$

วิธีทำ $a_0=\int_{-1}^{0}3\,dx+\int_{0}^{1}x\,dx=[3x]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{7}{2}$

$$a_n=\int_{-1}^{0}3\cos n\pi x\,dx+\int_{0}^{1}x\cos n\pi x\,dx$$

$$=\frac{3}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_{-1}^{0}+\left[\frac{x\sin n\pi x}{n\pi}+\frac{\cos n\pi x}{n^2\pi^2}\right]_0^1$$

$$=\frac{\cos n\pi-1}{n^2\pi^2}=\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2},\ n=1,2,3,\ldots$$

$$b_n=\int_{-1}^{0}3\sin n\pi x\,dx+\int_{0}^{1}x\sin n\pi x\,dx$$

$$=-\frac{3}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_{-1}^{0}+\left[-\frac{x\cos n\pi x}{n\pi}+\frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2}\right]_0^1$$

$$=\frac{-3+2\cos n\pi}{n\pi}=\frac{-3+2(-1)^n}{n\pi},\ n=1,2,3,\ldots$$

อนุกรมฟูเรียร์ของ $f(x)$ คือ

$$\frac{7}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x+\frac{2(-1)^n-3}{n\pi}\sin n\pi x\right]$$

$$=\frac{7}{4}+\frac{2}{\pi^2}(\cos\pi x+\frac{1}{3^2}\cos 3\pi x+\frac{1}{5^2}\cos 5\pi x+\cdots)$$

$$-\frac{5}{\pi}(\sin\pi x+\frac{1}{3}\sin 3\pi x+\frac{1}{5}\sin 5\pi x+\cdots)$$

$$-\frac{1}{\pi}(\frac{1}{2}\sin 2\pi x+\frac{1}{4}\sin 4\pi x+\frac{1}{6}\sin 6\pi x+\cdots)$$

ที่ $x=1$ จะได้

$$\frac{1}{2}\{f(1^+)+f(1^-)\} = 2 = \frac{7}{4}+\frac{2}{\pi^2}(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots)$$

$$\frac{\pi^2}{8} = 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

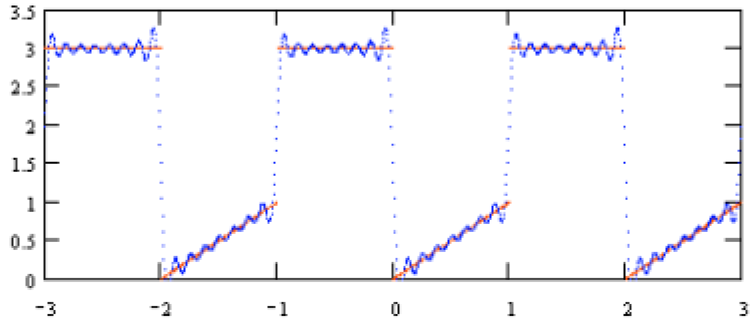
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

ที่ $x=\frac{1}{2}$ จะได้ $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} = \frac{7}{4}-\frac{5}{\pi}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots)$

$$\frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

หรือ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$

$$f(x)=\begin{cases}3, & -1<x<0\\ x, & 0<x<1\end{cases} \text{ และ } f(x+2)=f(x)$$



กราฟของ $f(x)$

เปรียบเทียบกับกราฟของผลบวกย่อยของ

อนุกรมฟูเรียร์ของ $f(x)$ ถึงพจน์ $n=15$

$$\frac{7}{4}+\sum_{n=1}^{15}\left[\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x+\frac{2(-1)^n-3}{n\pi}\sin n\pi x\right]$$